FORMACIÓN DOCENTE · MATEMÁTICA

ES

Modelización matemática en el aula

Posibilidades y necesidades

SILVIA SEGAL
DIANA GIULIANI

libros del Zorzal

Diana Giuliani
Silvia SeGal

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA

Posibilidades y necesidades

www.elsolucionario.org
free online eBooks and Solutions Manual
can be found at www.elsolucionario.org

libros del

Zorzal

BajaLibros.com

Segal , Silvia
Modelización matemática en el aula : posibilidades y necesidades / Silvia Segal y Diana Giuliani. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Libros del Zorzal, 2014.
E-Book.

ISBN 978-987-599-344-0

1. Formación Docente. 2. Matemática. I. Diana Giuliani II. Título
CDD 371.1

© Libros del Zorzal, 2008
Buenos Aires, Argentina

Armado y composición de interiores: Punto Aparte

Libros del Zorzal
Printed in Argentina
Hecho el depósito que previene la ley 11.723

www.elsolucionario.org

Para sugerencias o comentarios acerca del contenido de *Modelización matemática en el aula*, escríbanos a:

info@delzorzal.com.ar
www.delzorzal.com.ar

INTRODUCCIÓN

Este libro es el resultado de una búsqueda de condiciones posibles para un proyecto de enseñanza que ofrezca a los alumnos la experiencia de producir conocimiento matemático. La actividad de modelización provee una visión integrada de la matemática y, desde nuestro punto de vista, permite reconstruir en el aula una parte esencial del "quehacer" de la disciplina.

¿En qué consiste el "quehacer" matemático del que hablamos? Pensamos que "hacer matemática" es más que resolver problemas. También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para responderlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia, confrontar resultados, técnicas, validaciones. Teoremas y definiciones son a la vez productos y herramientas de todo este trabajo de construcción de conocimiento matemático.

Entendemos a la modelización matemática como un proceso que atraviesa distintos momentos[1] –recortar una problemática frente a cierta realidad, identificar un conjunto de variables pertinentes a esa problemática, producir relaciones entre las variables tomadas en cuenta, elegir una teoría para operar sobre las relaciones y producir conocimiento nuevo sobre dicha problemática–, integrando conocimientos de diferente naturaleza y abarcando el quehacer matemático.

Como los conocimientos no se presentan fragmentados, sino relacionados naturalmente a través de una situación problemática, la actividad de modelización reúne condiciones para realizar en el aula un trabajo análogo a la actividad científica, centrado en la producción matemática de los alumnos y donde se re-crean los conocimientos matemáticos a partir de las propuestas del docente.

Al mismo tiempo, al requerir que los alumnos tomen decisiones sobre la pertinencia de los recursos que ponen en juego y se hagan responsables de sus resultados, validándolos y confrontándolos con sus pares, el trabajo de reflexión sobre los problemas le imprime a la clase de matemática un valor formativo que va más allá de la

www.elsolucionario.org

matemática.

Los problemas que presentamos conllevan procesos de modelización de complejidad diversa, y los conceptos matemáticos que requieren son básicamente los señalados en los programas usuales para la escuela media, aunque aquí los articulamos de forma transversal a las "unidades" programáticas. La complejidad reside fundamentalmente en la exigencia de seleccionar y usar distintas herramientas y conocimientos en forma coordinada y simultánea. Los enunciados y análisis que proponemos no pretenden ser productos terminados, sino materia prima para que el docente siga "amasando" y, de acuerdo con su criterio y las circunstancias, seleccione, modifique o agregue sus propias variantes.

La tarea de "inventar" problemas no nos resultó sencilla. Para que un problema genere actividad matemática debe presentar cierta complejidad, admitir distintos procedimientos y dar lugar a la toma de decisiones. No cualquier enunciado con una pregunta reúne estas condiciones. La matemática de los programas nos impuso restricciones adicionales sobre las situaciones a modelizar, para que la complejidad no excediera las posibilidades de los alumnos.

En nuestro proceso empezamos resolviendo en forma experta muchas situaciones tomadas de diversas fuentes, analizamos posibles procedimientos no expertos de resolución, qué conocimientos se ponían en juego, qué técnicas matemáticas eran necesarias. Elegimos algunas y descartamos otras. Hemos incluido problemas que pueden tratarse de manera "artesanal", aun sabiendo que existen recursos más elaborados para abordarlos pero que no están al alcance de los alumnos de la escuela media. Este mismo criterio nos ha servido para descartar problemas que inicialmente nos habían parecido interesantes. En otros términos, quisimos hacer una propuesta que, aunque exigente porque rompe con las formas más usuales de ir tema por tema, resultara viable en las condiciones actuales de la enseñanza. Es así como, por ejemplo, excluimos un problema de optimización porque había que *derivar* y no encontramos procedimientos alternativos.

Nos valimos de una serie de herramientas didácticas que permiten comandar las estrategias de resolución de los alumnos, los conocimientos que se ponen en juego, las formas de validación, la complejidad matemática, el sentido de los conceptos involucrados. Entre otras:

- el juego de traducciones mutuas entre distintas representaciones (lenguaje natural, diagrama, dibujo, escritura algebraica, tablas, fórmulas, gráficos cartesianos);
- la modificación de los valores de los datos, que puede influir sobre la cantidad o el dominio numérico de las soluciones;
- la secuenciación de los problemas;
- la habilitación o no del uso de calculadora y computadora;
- cambios en el lugar de la incógnita.

Todo el libro puede leerse con el sentido práctico de *problemas para el aula*, y también como un despliegue in situ de toda una gama de posibilidades didácticas. Lo pensamos como una herramienta de estudio, y procuramos dar al lector la oportunidad de reflexionar o resolver ciertas cuestiones por su cuenta antes de encontrar respuestas en el libro.

Mapa del libro

Cada capítulo gira en torno a una situación distinta: graduar una escala, acomodar latas, solicitar un préstamo bancario, fabricar una boya flotante, encontrar un área máxima; y los conocimientos involucrados son muy variados: desde una ecuación cuadrática, pasando por propiedades de tangencia de circunferencias, por el crecimiento exponencial, o por métodos numéricos, entre muchos otros.

El primer capítulo trata la problemática de graduar un bebedero de campo. El punto de partida fue un problema adaptado de un artículo de investigación en didáctica de la matemática, que a su vez había sido tomado de un manual francés. Incluimos en su análisis distintas estrategias de resolución, posibles errores de los alumnos, intervenciones docentes, conocimientos que se ponen en juego, una parametrización y dos variantes del problema, y una posible secuencia para la puesta en aula.

Los problemas geométricos del segundo capítulo se gestaron a partir de una situación que proponía introducir los números irracionales en un contexto de acomodar latas. A partir de la modelización de las latas con circunferencias, generamos diversos problemas geométricos y numéricos que ponen en juego relaciones cualitativas y cuantitativas de las disposiciones de rectas y circunferencias tangentes.

El tercer capítulo parte de la situación real de calcular la cuota de un préstamo bancario. Además del interés práctico del contexto, la situación permite trabajar, a través de algoritmos recursivos, con técnicas numéricas no habituales en la escuela y, al mismo tiempo, integra a la computadora como recurso para hacer cálculos y producir gráficos. También nos apoyamos en la planilla de cálculo para hacer un trabajo intermedio entre lo aritmético y lo algebraico. La segunda parte del capítulo propone algunos problemas sobre progresiones geométricas y crecimiento exponencial, en respuesta a interrogantes que se abren con el problema del préstamo.

El cuarto capítulo empezó con la idea de trabajar algoritmos numéricos para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones. Después de un proceso que se había internado en el análisis de algoritmos iterativos infinitos y su convergencia, logramos darle forma tomando como eje el estudio de la existencia de soluciones.

El quinto capítulo reúne varios problemas más “internos” de la matemática donde jugamos con la interacción entre distintos registros, yendo de la geometría al álgebra, del álgebra a lo funcional. Los primeros consisten en maximizar el área de rectángulos inscriptos en triángulos rectángulos o en un cuarto de circunferencia. La reinterpretación de estos objetos geométricos en términos funcionales da lugar a una familia de problemas de optimización.

1 Sadovsky (2005).

www.elsolucionario.org

CAPÍTULO I

El problema del bebedero

En este capítulo analizaremos un problema que implica la elaboración de un modelo matemático para una situación real. El trabajo con el modelo involucra la elección de las herramientas matemáticas que permiten operar sobre él y el estudio de la validez de las soluciones matemáticas obtenidas como soluciones del problema. El análisis que realizamos está atravesado por distintas cuestiones didácticas: los diferentes procedimientos que el problema admite y los conocimientos que éstos involucran, los posibles errores de los alumnos y las intervenciones docentes que, desde nuestro punto de vista, ayudan a sostener el trabajo de los estudiantes. El estudio de la familia de problemas que resulta de la parametrización de los datos complementa este análisis.

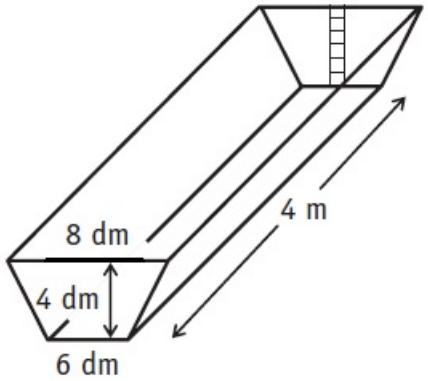
A continuación presentamos una secuencia de problemas para la puesta en aula y la comparamos con otra secuencia, tomada de un manual francés, que fue la que dio origen a la versión del problema que proponemos aquí. Aunque, a primera vista, las dos versiones podrían parecer similares, discutiremos que los aprendizajes resultan significativamente diferentes en una y en otra.

Con la intención de profundizar la mirada funcional sobre el problema, planteamos luego un trabajo de interacción entre diferentes representaciones, poniendo el foco en lo cualitativo por sobre lo numérico.

Finalmente mostramos dos variantes del problema: una que trabaja con una función definida por partes, y la otra que invita a reflexionar sobre los usos y las limitaciones de un modelo.

El problema[2]

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo:



Se trata de un prisma recto de 4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6 dm, base mayor 8 dm y altura 4 dm.

Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300,... litros.

Para graduar la varilla habrá que decidir dónde deben ir las marcas. La tarea alrededor de la resolución de este problema colocará al alumno –también al docente y al lector– frente a problemas intermedios que deberá ir enfrentando paso a paso. Los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de cada uno de estos problemas intermedios son muy variados. Las distintas estrategias que propongan los alumnos dependerán de las herramientas matemáticas de las que disponga cada uno.

Para entrar en calor: el volumen total del bebedero

Un primer paso para encarar el problema es calcular el volumen total. Invitamos al lector a hacerlo antes de seguir leyendo.

A lo largo de nuestro análisis expresaremos todas las longitudes en *dm* y escribiremos sólo los números, sin las unidades. Esta no es una decisión sin consecuencias: otra elección de las unidades proveería un modelo distinto para la misma situación, y el uso simultáneo de diferentes unidades llevaría a expresar los volúmenes en unidades no convencionales como $dm^2 \cdot m$.

Antes que nada es necesario reconocer el prisma recto, ya que la base no está apoyada, como ocurre habitualmente, sobre el plano horizontal. Para calcular el volumen de un prisma se necesita disponer de una fórmula (uno puede recordarla o recurrir a un libro en busca de ella): el volumen de un prisma recto es igual a la superficie de la base del prisma por la altura del mismo. Si se dispone de la fórmula usual para el cálculo de área de un trapecio, el volumen total V del bebedero resulta:

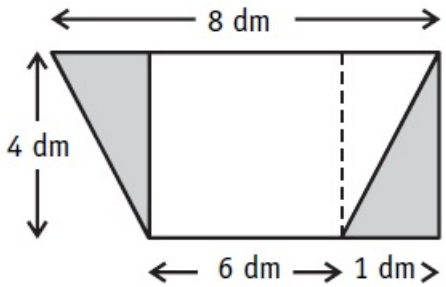
www.elsolucionario.org

$$V = \frac{B + b}{2} \cdot h \cdot 40 = \frac{8 + 6}{2} \cdot 4 \cdot 40 = 1120,$$

donde $b = 6$ es la base menor del trapecio y $B = 8$, la base mayor. Obtenemos un volumen total del bebedero igual a *1120 dm3* o *litros*.

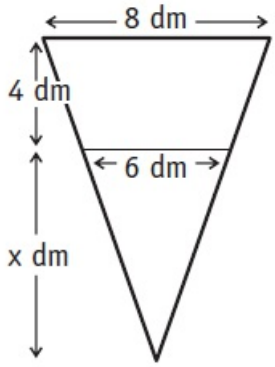
¿Qué pasaría si no se recordara la fórmula del área del trapecio? Aunque habría que "remar" un poco más, también se podría calcular a partir de la fórmula del área del rectángulo. Veamos.

Como se trata de un trapecio isósceles, se puede calcular su área como la suma de las áreas de dos rectángulos, uno de área $6 \cdot 4$ y otro de área $1 \cdot 4$. Se puede, entonces, pensar el volumen del prisma original como:



$$V = (b \cdot h + \frac{B - b}{2} \cdot h) \cdot 40 = (6 \cdot 4 + 1 \cdot 4) \cdot 40 = 1120$$

También se puede pensar el área del trapecio como la diferencia entre las áreas de dos triángulos isósceles:



Por el teorema de Thales, o apoyándose en la semejanza de los dos Modelización matemática en el aula

triángulos:

$$\frac{8}{4 + x} = \frac{6}{x}$$

de donde $x = 12$ y la altura del triángulo grande es *16 dm*. El área del trapecio será

$$\frac{8 \cdot 16}{2} - \frac{6 \cdot 12}{2} = 64 - 36 = 28$$

y el volumen total del bebedero será: $V = 28 \cdot 40 = 1120$.

No estamos pensando que el profesor deba mostrar las distintas opciones para calcular un volumen. Aquí sólo estamos anticipando algunas estrategias posibles, no necesariamente las únicas. Este trabajo de anticipación de estrategias le permite al docente entrar en más "recovecos" del problema e identificar los distintos conocimientos involucrados. Podrá así guiar la actividad de los alumnos con mayor soltura, indagando, observando o interpretando cuáles son los conocimientos de los que dispone cada alumno que intenta abordar el problema. Al mismo tiempo, estamos comunicando que los recursos en los que suele pensarse en una primera instancia no son los únicos que permiten resolver un problema. Aprender a bucear en las estrategias disponibles es parte de la formación matemática que nos parece interesante promover.

Posibles dificultades de los alumnos frente al cálculo de los volúmenes parciales

Hasta aquí hemos calculado el volumen total del bebedero. ¿Cuál es la relación entre el volumen y el nivel del agua? Para entendernos, llamaremos "trapecio" –a secas– al trapecio que queda determinado sobre la base del prisma al llenar una parte del bebedero hasta una cierta altura *h*.

El problema pide hallar la altura *h* para ciertos volúmenes. Pero, para establecer una relación entre volúmenes y alturas, resulta más sencillo calcular el volumen para una altura *h* cualquiera.

La base menor del trapecio sombreado mide *6 dm*, pero la medida de la base mayor dependerá de la altura. En un primer momento, un alumno confrontado con el problema puede no reconocer esta dependencia. Sin embargo, tratar las dos variables como si fueran independientes le impedirá continuar con los cálculos y se verá forzado –eso se espera– a buscar y establecer las relaciones correspondientes. Acá hay una pequeña idea que, en algún momento, será interesante discutir con los alumnos: buscar relaciones entre las variables del problema es una estrategia básica del trabajo de modelización. El contexto del problema apoya esta búsqueda: es claro que cuando se llena el bebedero hasta un cierto nivel, la base mayor del trapecio queda automáticamente determinada. Como se trata de un prisma recto, algunos alumnos pueden considerar erróneamente que existe una relación de proporcionalidad entre la altura y el volumen. Si la base mayor es proporcional a la altura, ¿por qué no concluir en una relación de proporcionalidad entre altura y volumen? Este razonamiento lo conducirá, seguramente, a la fórmula

www.elsolucionario.org

$$V(h) = 1120 \cdot \frac{h}{4}$$

calculando por regla de tres o armando proporciones. Para tomar conciencia de su error requerirá de otros, sus pares o el docente. Se lo puede invitar, por ejemplo, a analizar qué pasa con el volumen de agua cuando el bebedero está lleno hasta la mitad de la altura, ya que en este caso es fácil concluir que no puede ser la mitad del volumen total. Calcular el volumen para *2 dm* de altura puede ser de utilidad antes de enfrentar una fórmula general para cualquier altura.

También se puede establecer una comparación entre el bebedero del problema y otro de base rectangular, donde el volumen sí crece en forma proporcional a la altura del agua, correspondiendo al modelo lineal producido por los alumnos (de este caso límite, donde la base mayor y la base menor son iguales, nos ocuparemos con más detalle más adelante).

Una vez reconocida la existencia de una relación entre la base mayor del trapecio y la altura (nivel del agua), se la puede encontrar de diferentes maneras: ya sea en un marco geométrico, utilizando el teorema de Thales, o a través de las propiedades de triángulos semejantes o apoyándose en la noción de tangente de un ángulo, o bien en un marco algebraico construyendo una función lineal. Nótese que se trata de distintas caras de un mismo conocimiento, y que algunas pueden estar disponibles para un alumno, y otras no. Es probable que distintos alumnos recurran a distintas herramientas, lo cual justifica que el docente promueva la circulación de las ideas en juego y el análisis de sus interrelaciones.

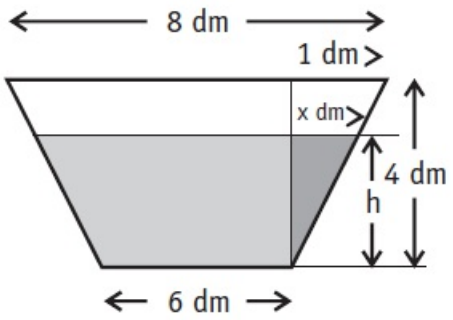
Como se ve, este problema involucra muchos conocimientos en simultáneo, sin fragmentarlos o limitarlos según los requerimientos de un título o punto de un programa, y la complejidad no reside tanto en los conocimientos en sí mismos, sino justamente en la necesidad de su uso simultáneo.

El alumno puede investigar, explorar, probar, buscar, decidir y elegir las herramientas que él conoce y que le parezcan pertinentes. Este recorrido incluirá diferentes problemas intermedios:

- establecer una relación entre la base mayor del trapecio y el nivel del agua;
- calcular el volumen de agua para un nivel determinado, ya sea para algunos valores numéricos de la altura, o expresando el volumen en función del nivel;
- calcular el nivel que corresponde a cada uno de los volúmenes de *100, 200, 300,... litros*.

Diferentes estrategias

Una solución experta podría determinar, en primer lugar, la base mayor del trapecio en función de la altura, usando el teorema de Thales para los triángulos de la figura.



$$\frac{1}{4} = \frac{x}{h} \text{ , o sea, } x = \frac{h}{4}$$

Se puede expresar el volumen V en función de la altura h:

$$V(h) = \frac{(6 + 2x) + 6}{2} \cdot h \cdot 40 = \frac{12 + h/2}{2} \cdot h \cdot 40 =$$
$$= 240\,h + 10\,h^2,\ 0 \leq h \leq 4$$

Una forma de chequear la fórmula obtenida es calcular el volumen total *V(4)* y controlar que dé *1120*. Esto no garantiza que la fórmula esté bien, pero permite detectar errores en el caso de que no dé *1120*. No necesariamente los alumnos revisan sus resultados de manera espontánea. Promover en los estudiantes una actitud de control sobre su propia producción es, desde nuestro punto de vista, una función esencial del trabajo docente porque es un modo de colaborar con la construcción de una posición de autonomía intelectual.

La función inversa permite calcular la graduación de la varilla:

$$h = h(V) = \frac{-240 + \sqrt{240^2 + 40\,V}}{20},\ 0 \leq V \leq 1120$$

Es probable que los alumnos obtengan la fórmula del volumen de agua en función de la altura, y despejen *h* sin pensar necesariamente en la función inversa. Puede ocurrir que resuelvan numéricamente once ecuaciones de segundo grado: para *V = 100, 200,...* Después de resolver tres o cuatro ecuaciones, ya puede "decantar" que:

$$h = h(V) = \frac{-240 + \sqrt{240^2 + 40\,V}}{20}$$

Para cada valor del volumen se obtienen dos valores de la altura, de los cuales hay que descartar uno porque es negativo. ¿Por qué encontramos soluciones matemáticas que no son soluciones del problema real? ¿Elegimos bien el modelo? ¿Se trata de un modelo de esta situación si produce soluciones que no sirven? Es hora de ajustar el modelo estudiando las condiciones para que toda solución matemática resulte también solución del problema original. En este caso, alcanza con restringir explícitamente el dominio de la función cuadrática *V(h)* al intervalo *[0,4]*. La restricción del dominio se hace necesaria en la modelización de la situación –no es una condición impuesta desde afuera de manera caprichosa– y garantiza la existencia de la función inversa *h(V)*.

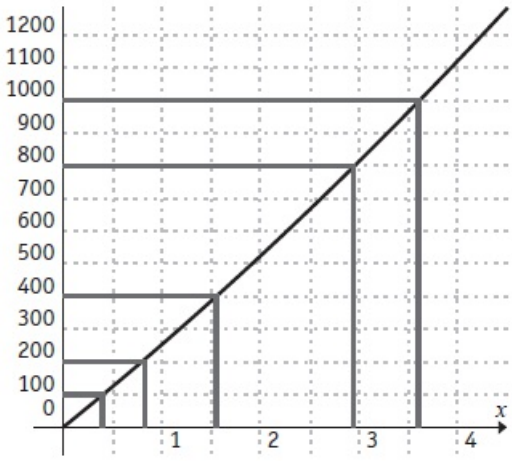
www.elsolucionario.org

Que los alumnos utilicen la fórmula para despejar *h*, no significa que reconozcan a este cálculo como función inversa de *V(h)*. El paso de la resolución de las distintas ecuaciones de segundo grado a la fórmula de la función inversa implica una generalización que el docente puede proponer como asunto a tratar.

También puede ocurrir que los alumnos usen la fórmula para armar una tabla de valores de *h* y *V(h)*, con pasos regulares para *h*, corroborando que la variación del volumen no es constante y que el modelo no puede ser lineal.

Otra manera de usar la fórmula del volumen es hacer un gráfico de la función *V(h)* y determinar en forma aproximada los valores de *h* tales que *V(h) = 100, 200, 300,...*

Este procedimiento es el equivalente gráfico de la resolución de las once ecuaciones, ya que se están encontrando los puntos de intersección de la parábola $y = 10x^2 + 240x$ con las rectas *y = 100, y = 200,...*



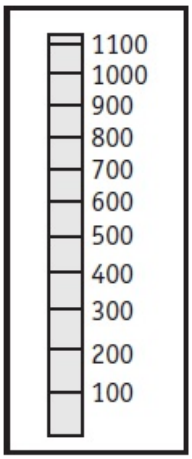
La varilla graduada

Para responder la consigna del problema, los alumnos pueden dibujar la varilla utilizando los valores numéricos obtenidos.

A partir del dibujo se puede analizar

que las distancias entre las marcas de graduación se juntan levemente a medida que aumenta el volumen, y que esto es consecuencia de la forma trapezoidal del bebedero.

Esta idea se puede completar preguntando cómo sería el bebedero si las marcas de la varilla fueran equidistantes. De esta forma, se retoma también el modelo lineal que corresponde a un bebedero de forma rectangular.



Parametrización. Una familia de problemas

Consideremos un bebedero como el original, con forma de prisma recto cuyas bases son trapecios isósceles, pero en lugar de datos numéricos consideremos medidas cualesquiera. Para cada elección de valores numéricos de los parámetros *B*, *b*, *H* y *l* obtenemos un problema distinto –el "mismo" problema con otros números– que se puede resolver, en principio, de la misma forma:

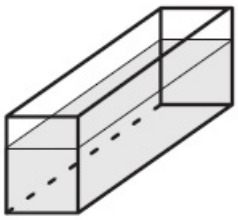
$$V(h) = \frac{b + [b + \frac{h}{H}(B - b)]}{2} \cdot h \cdot l = b \cdot l \cdot h + \frac{B - b}{2H} \cdot l \cdot h^2$$

para luego calcular la función inversa *h(V)* correspondiente.

Sin embargo, queremos señalar que con un cambio en los valores numéricos, los conocimientos involucrados pueden cambiar esencialmente.

El trabajo con parámetros implica una complejidad mucho mayor y aunque trae como recompensa la posibilidad de tomar el problema como objeto de análisis y realizar un estudio más general, es costoso para los alumnos entrar en dicho análisis.

Como ya hemos mencionado antes, en el caso límite $b = B$, es decir, cuando el trapecio es un rectángulo, la fórmula para el volumen del bebedero lleno hasta una altura *h* resulta ser lineal:

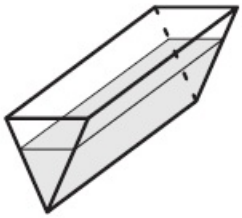


$$V(h) = b \cdot l \cdot h$$

www.elsolucionario.org

No es necesario apelar al teorema de Thales, las marcas de la graduación serán equidistantes y el problema se puede resolver simplemente por regla de tres, considerando la constante de proporcionalidad $b \cdot l$, y escribiendo la función inversa $h(V) = V / (b \cdot l)$ por simple "despeje" de h.

Eligiendo $b = 0$ obtenemos otro caso límite en el cual el trapecio isósceles se transforma en un triángulo isósceles y la fórmula del volumen será "puramente" cuadrática (no hay término lineal ni constante):

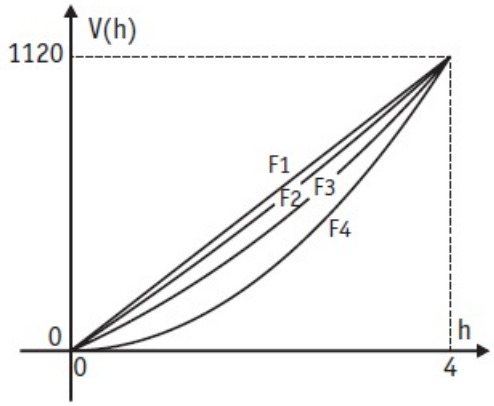


$$V(h) = \frac{B}{2H} \; l \cdot h^2$$

Las marcas de la graduación no serán equidistantes, el teorema de Thales –u otro conocimiento equivalente– sí será necesario para calcular la base del triángulo sombreado, pero se puede calcular la altura h despejando directamente de la fórmula.

Entre estos dos casos límite –el "puramente" lineal $(b = B)$ y el "puramente" cuadrático $(b = 0)$–, el cociente b/B puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. Si b es mucho menor que B, predomina el coeficiente cuadrático sobre el lineal y, a la inversa, si b es cercano a B, predomina el coeficiente lineal sobre el cuadrático.

Esta variación de los valores se refleja en los gráficos correspondientes. Aquí representamos $V(h)$ para cuatro bebederos distintos, todos de 4 *m* de largo, 4 *dm* de altura y de igual volumen total, 1120 *litros*. La diferencia radica o 4 únicamente en las longitudes de B y b, lo que hace que los prismas tengan distintas formas: rectangular (F1), trapezoidal (F2 y F3) y triangular (F4).



No estamos diciendo que el problema parametrizado deba ser llevado al aula. Consideramos que estudiarlo es una tarea necesaria en la formación de un profesor,

porque tomar distancia del problema particular le permite tener una perspectiva más general de las relaciones que se ponen en juego en el problema. Esta visión más global facilita, entre otras cosas, una elección de los números acorde con las cuestiones que se quieren promover. En nuestro caso privilegiamos la forma de un bebedero real aun cuando la gráfica resulta bastante parecida a la de una función lineal.

Puesta en aula. Una posible secuencia

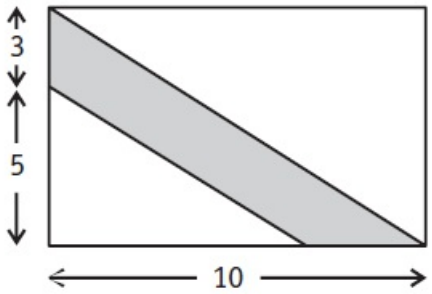
¿Es posible llevar este problema al aula? ¿Están nuestros alumnos en condiciones de abordarlo?

Resolver este problema requiere que los alumnos investiguen, busquen sus propias estrategias, las confronten con las de sus compañeros, asuman la responsabilidad de sus resultados. La resolución grupal se complementa con la resolución individual, y la puesta en común es una oportunidad de intercambio. Con este trabajo se va construyendo una comunidad de producción matemática en el aula. Todas estas cuestiones no se logran con un solo problema, sino que resultan de un proceso largo y difícil. Creemos que vale el intento.

Traemos aquí una posible secuencia que incluye dos problemas previos que ponen en juego algunos de los conocimientos matemáticos necesarios para resolver nuestro problema –preparando el terreno, si fuera necesario, para enfrentar la simultaneidad de conocimientos de la que hablábamos más arriba–:

1. Problema del caminito

Para embaldosar un patio rectangular, se desea saber el área del caminito sombreado determinado por la diagonal y una paralela a la misma.

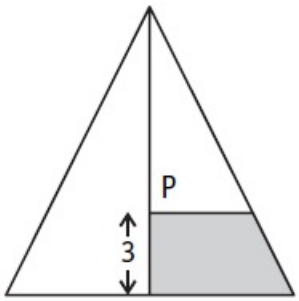


2. Problema del triángulo. Se tiene un triángulo isósceles de altura 15 cm y base 10cm. Si se marca sobre la altura un punto P a 3 cm de la base.

¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Ubicar al punto P sobre la altura para que el área sombreada sea 24cm²; 31,5cm²; 40cm².

www.elsolucionario.org



3. Problema del bebedero

Dependiendo del estado de conocimientos de los alumnos, antes de proponer el problema del bebedero se pueden trabajar los problemas del caminito y del triángulo, o sólo el del caminito, o ninguno de ellos.

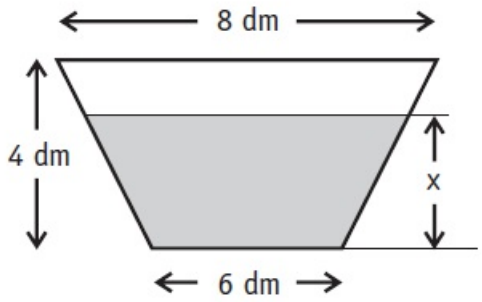
El problema del caminito requiere de un manejo algebraico simple y pone en juego sólo algunas de las herramientas necesarias para la resolución del problema del bebedero: el teorema de Thales, la noción de semejanza o la noción de tangente. La elección de las herramientas necesarias sigue recayendo sobre el alumno.

El problema del triángulo avanza sobre el trabajo algebraico necesario para resolver el problema del bebedero –la modelización resulta en una ecuación cuadrática– y pone en juego el cálculo del área del trapecio, pero está planteado en dos dimensiones y no es necesario trabajar con volúmenes. Además, preguntar por distintos valores de *P* agrega las ideas de variación y de dependencia funcional entre variables.

Otra posible secuencia. Qué y cómo se aprende con un problema[3]

El problema del bebedero, tal como lo presentamos en este capítulo, fue analizado en un artículo por Marie Jeanne Perrin Glorian, quien, a su vez, lo retoma de un trabajo titulado “La entrada en el mundo del pensamiento funcional en clase de segundo”, de Didier Pihoue. Pihoue “transforma” un problema publicado en un manual francés. En el manual, el problema es una lista de pasos o situaciones que el alumno debe resolver:

Un bebedero tiene la forma de un prisma recto de largo 4 m y sus extremos interiores son dos trapecios isósceles isométricos de base menor 6 dm, base mayor 8 dm y altura 4 dm. a) Llamamos *x* a la altura del agua en el bebedero, expresada en *dm*. *x* varía de *0* a *4*, ya que *4 dm* es la altura del bebedero.



i) Utilizando el teorema de Thales, calcular el área sombreada en función de x.

ii) Si x es la altura expresada en dm del agua del bebedero, calcular el volumen de agua expresado en litros. Denotarlo $V(x)$. Verificar que se obtiene $V(x) = 240x + 10x^2$.

b) Se ubica una varilla verticalmente sobre uno de los trapecios. Se pide graduarla, es decir, precisar el nivel de agua correspondiente a *100, 200, 300,...litros*. Para graduar la varilla del bebedero, se puede graficar la función v, definida en el intervalo $[0,4]$ por $V(x) = 240x + 10x^2$.

i) Programar la calculadora y completar la siguiente tabla de valores:

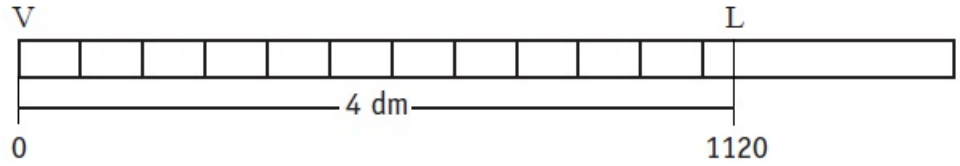
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$V(x)$	0								1120

Representar los puntos de coordenadas $(x, V(x))$ en un sistema de coordenadas convenientemente elegido y unir los puntos obtenidos con una curva suave (se puede recurrir a calcular valores intermedios). Hemos representado así la función V en el intervalo $[0,4]$.

ii) Utilizar la curva para leer los valores aproximados del número x correspondiente a los valores siguientes de $V(x)$: *100, 200, 300,..., 1100*.

Establecer en una semirrecta la graduación a trazar en la varilla del bebedero.

c) Una persona, poco matemática, ha construido la graduación de la siguiente manera, pues ha graduado el segmento VL regularmente:



i) ¿Cuál es el número $w(x)$ marcado a una distancia x (en *dm*) del punto V?

Representar en la misma gráfica de la pregunta b) la función $x \to w(x)$.

Probar que el error $e(x) = w(x) - V(x)$ cometido para cada valor de x es $e(x) = 10 \cdot (4 - x)$. Indicar cómo se lo puede leer gráficamente.

ii) Representar gráficamente la función $x \to e(x)$ en el mismo sistema de coordenadas que el utilizado para las funciones V y w. Leer gráficamente el valor de x para el cual el error es máximo. Justificar analíticamente el resultado obtenido gráficamente.

www.elsolucionario.org

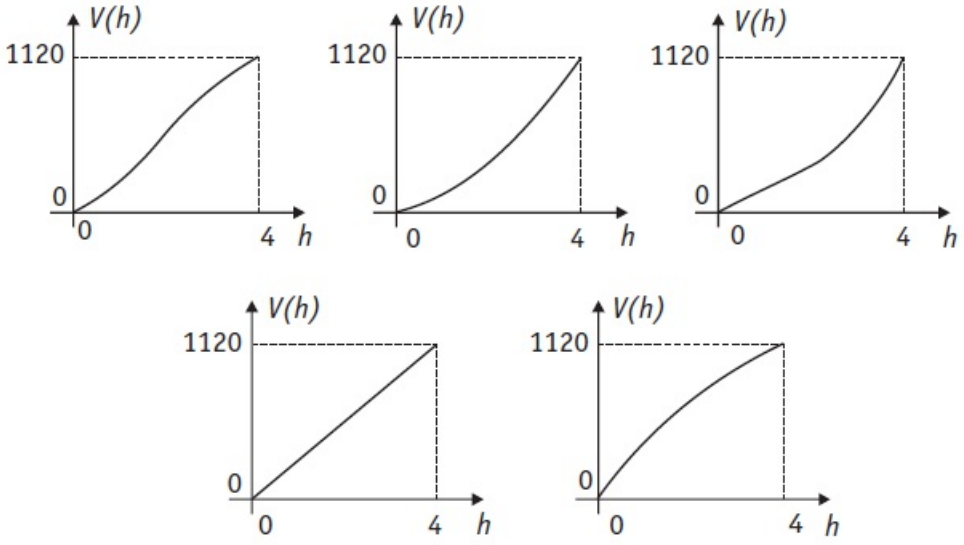
Planteado de esta forma, nos aseguramos que el alumno podrá arribar a los *resultados* del problema. Tendrá que buscar el triángulo que le permita usar el teorema de Thales, tendrá que utilizar la fórmula del volumen del prisma ubicando cuál es la base de ese prisma, tendrá que realizar la representación gráfica de una función cuadrática. Pero no se cuestionará si el teorema de Thales sirve o no para resolver el problema, sólo lo aplicará. No buscará si hay una relación entre la altura y el volumen, se limitará a buscar "la" fórmula de la función cuadrática pertinente. No aparecerán como necesarias las nociones de tangente de un ángulo ni la de semejanza de triángulos y, por lo tanto, tampoco habrá ocasión de tratar al teorema de Thales, la semejanza y la tangente como distintas formas de una misma relación entre los lados de dos triángulos.

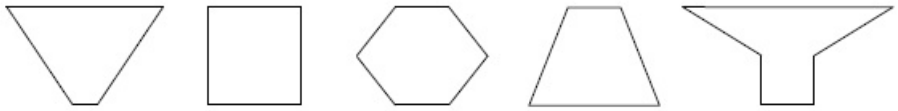
Se está dejando afuera la posibilidad de que el alumno *investigue* y *elija* sus propias herramientas matemáticas, busque cómo validar sus resultados, reconozca las dificultades para construir un modelo matemático, discuta con sus compañeros las diferentes estrategias elegidas. En fin, el problema no es el mismo porque no lo es en cuanto al aprendizaje que promueve.

Una vuelta de tuerca

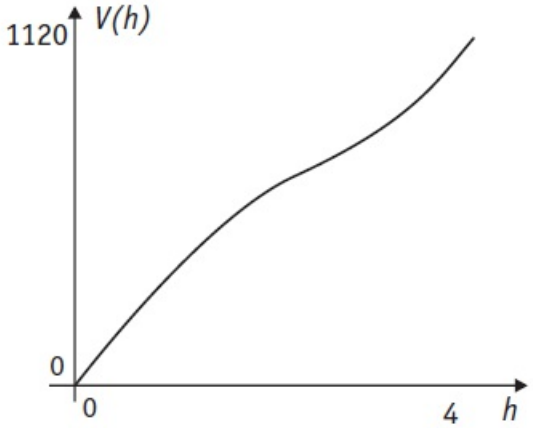
A continuación del problema del bebedero se pueden ampliar, y/o profundizar algunas de las ideas trabajadas proponiendo la siguiente actividad:

a) Establecer una correspondencia entre los siguientes gráficos y formas de bebederos:





b) Dibujar la varilla para un bebedero del que se conoce solamente el gráfico:

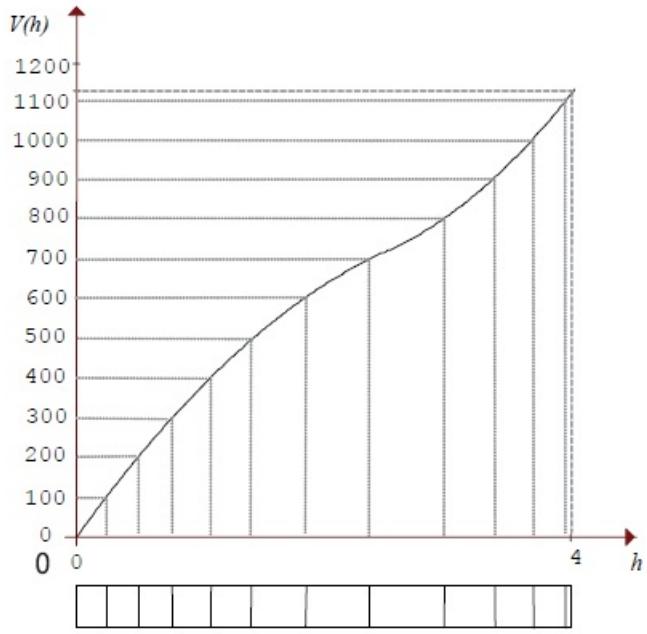


La actividad propuesta permitirá hacer un análisis cualitativo de la situación. Sin necesidad de hacer cuentas, será posible tener una mirada funcional de la relación entre las dos variables en juego: el volumen de agua y la altura hasta donde está lleno el bebedero. Los alumnos que hayan resuelto el problema original como una lista de once ecuaciones pueden haber perdido de vista esta relación, y este trabajo ayudará a recuperarla.

Aquí también se eligieron bebederos prismáticos con el mismo volumen y altura, donde lo único que cambia es la forma de la base del prisma. De este modo, para distinguirlos será necesario analizar esta diferencia, que en los gráficos se manifiesta en las distintas velocidades de crecimiento de las funciones *V(h)*. Por ejemplo, el bebedero rectangular se corresponde con el crecimiento uniforme y el trapezoidal con un crecimiento parabólico.

La intención de la parte b) es vincular la función *V(h)* con la graduación de la varilla más allá de la fórmula. Una posible estrategia es marcar los volúmenes a graduar *(100, 200, 300,..., 1120 litros)* en el eje de las ordenadas y determinar los valores correspondientes de las alturas en el eje de las abscisas.

www.elsolucionario.org



Los alumnos que no reconozcan esta relación, probablemente hagan primero un dibujo aproximado del bebedero y, apoyándose en él, dibujen la varilla. El docente puede agregar una varilla, pero sin marcas.

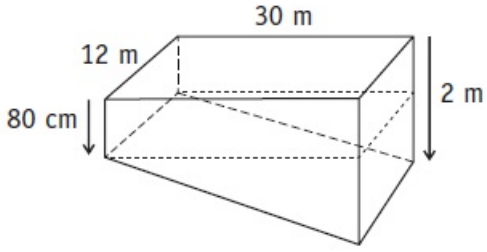
Dos variantes del problema del bebedero

A tono con las ideas trabajadas hasta aquí, proponemos dos problemas que, aunque requieren de una modelización en cierta forma similar, presentan nuevos aspectos: en uno, la función que modeliza la situación está definida

por partes, y el otro presenta una situación donde el modelo será necesariamente aproximado.

La pileta de natación

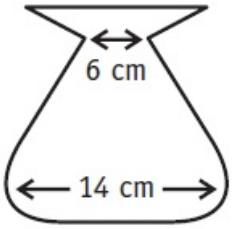
Una pileta de natación tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura:
¿Cuántos litros de agua hacen falta para llenarla?
¿Hasta qué altura se llena con 200.000 litros de agua?
¿Y con 480.000 litros?



La relación entre el nivel de agua y su volumen es en este caso una función cuadrática "pura" en la parte más profunda de la piscina, y lineal en la otra parte. El alumno tendrá que reconocer la diferencia en la variación del volumen en función del nivel de agua en una y otra parte de la piscina. No estamos pensando que el alumno necesariamente sepa qué es una función partida, sino que, por el contrario, definir una función partida puede ser parte del aprendizaje a partir de esta situación problemática.

La jarra de café

¿Qué altura aproximada debe tener la jarra de café para que su capacidad sea de un litro, si se sabe que el radio de la boca es 3cm y el de la base es 7cm?



¡Glup! ¿Por dónde empezar si no se conoce una fórmula para calcular el volumen? En efecto, para encontrar una relación entre la altura y el volumen de la jarra se requiere del uso de integrales, suponiendo además que ya se conoce una fórmula que defina los bordes curvos.

Pero para hacer un cálculo aproximado se puede considerar que la jarra es estrictamente cónica –un cono truncado–, despreciando los bordes redondeados de la base. Esta simplificación del modelo habilita el uso de una fórmula conocida para el cálculo del volumen. Es una simplificación voluntaria que nos permite operar con él.

Citando a Tijonov[4]: "El modelo matemático nunca es idéntico al objeto que se considera, no transmite todas sus propiedades y peculiaridades [...] Se trata de una descripción más o menos aproximada del objeto, según las suposiciones que se hagan,

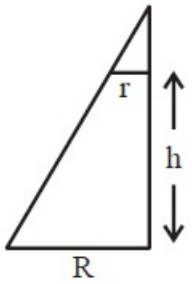
www.elsolucionario.org

limitaciones que se tengan, herramientas de las que se disponga".

Entonces, si no necesitamos demasiada precisión, el modelo cónico será suficiente para obtener un valor aproximado de la altura de la jarra. "Provee una imagen voluntariamente empobrecida, y es justamente esto lo que potencia sus posibilidades"[5].

¿Cómo se decide cuándo se pueden despreciar y cuándo, al hacerlo, me "alejo" de los resultados "reales"? No hay una única respuesta y puede ser muy rico discutir con los alumnos los alcances y límites de un modelo, según las variables que se toman como relevantes. En este caso, la forma de la jarra.

Como en el problema del bebedero, aquí también se requiere del teorema de Thales para establecer una relación entre los datos y la altura de la jarra. A partir de la fórmula para calcular el volumen del cono, el volumen de la jarra resulta ser una función lineal de la altura:



$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r} \cdot h$$

Pensando en un fabricante de jarras, si las curvas de la base son poco pronunciadas, la solución $h = 20cm$ que da este modelo será suficientemente buena para construir la jarra. Si las curvas son muy pronunciadas, seguramente habrá que ajustar el modelo.

Es muy común que gran parte del recorte de la problemática venga ya dado en el enunciado de los problemas. Es imposible no hacer un recorte al escribir un enunciado, pero es importante ser concientes de ello para dejar abiertas algunas cuestiones cuando esto sea posible o pueda generar trabajo matemático.

Sin embargo, el recorte de una problemática a partir de una realidad compleja también forma parte del proceso de modelización y sería bueno que los alumnos arriben al final de la escuela pudiendo hacer ellos mismos este recorte aun cuando no sepan cabalmente con qué técnicas matemáticas resolverán el problema que resulte.

2 Este enunciado, con pequeñas modificaciones, fue tomado de Perrin Glorian (1998).

3 Sadovsky (2005: 115-117).

4 Tíjonov y Kostómarov (1984).

5 Papini (2002).

CAPÍTULO II

Problemas con latas

Los problemas propuestos en este capítulo tienen que ver con la situación práctica de empaquetar latas.

Cuando se intenta optimizar el espacio para acomodar latas en cajas o envolverlas en plástico, cobran importancia los puntos de contacto entre las latas, y entre ellas y el envoltorio. No importa el volumen ni la altura de las latas, lo relevante es la forma circular de sus bases. Las latas se pueden modelizar entonces en dos dimensiones con círculos. Esta modelización nos llevará a considerar diversos problemas geométricos y numéricos.

Analizamos en primer lugar una actividad que pone en juego las propiedades de tangencia entre circunferencias, y entre rectas y circunferencias. Apoyándonos en este trabajo encararemos el problema de envolver latas en plástico, que involucra relaciones cualitativas y cuantitativas de las disposiciones de circunferencias tangentes.

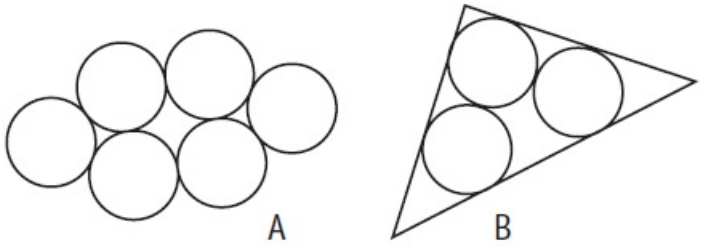
Finalmente, acomodar latas en cajas nos permitirá analizar el espacio ocupado por las latas en dos disposiciones diferentes y encontrar una fórmula general que relacione el ancho de una caja con la cantidad de latas que caben.

Geometría de las latas

Las figuras pueden ser soporte del análisis de propiedades geométricas. Vamos a considerar la siguiente actividad:

www.elsolucionario.org

Reproducir las figuras A y B con escuadra no graduada y compás. No hay necesidad de respetar las mismas medidas, pero hay que mantener la "forma" de cada figura y las condiciones explicitadas en el texto.



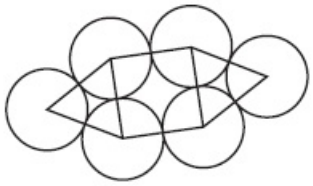
Todas las circunferencias tienen el mismo diámetro, y el triángulo de la figura B es rectángulo. Todos los puntos de contacto son puntos de tangencia.

La reproducción de las figuras a una escala cualquiera y con escuadra *no graduada* ayuda a poner el énfasis en las relaciones entre los elementos de las circunferencias tangentes y *no* tanto en las medidas (del diámetro o de las distancias entre los centros).

En lugar de proponer una actividad de reproducción, se puede optar también por un dictado de las figuras[6].

La figura A

Para reconstruir la figura A, una posibilidad es reconocer un cuadrado y dos triángulos equiláteros formados por los centros de las circunferencias, y que el lado del cuadrado y el de los triángulos son todos iguales a dos radios.



¿Por qué se forman un cuadrado y triángulos equiláteros?

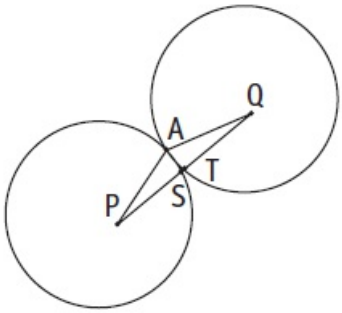
¿Por qué el lado del cuadrado y el de los triángulos tienen la misma longitud que el diámetro de las circunferencias? ¿Qué propiedades geométricas lo justifican? Proponemos al lector tomarse un tiempo para pensarlo antes de seguir leyendo.

Sabemos que la distancia del punto de tangencia al centro de cada circunferencia es igual a un radio, y que todos los radios son iguales. ¿Cuál es la distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes e iguales? En el dibujo *parece* ser dos radios. Claro, siempre y cuando el punto de tangencia se encuentre en la recta que une los centros.

¿Pero es así? ¿Qué propiedades geométricas, más allá de la percepción visual, lo podrían justificar? ¿Será cierto que "la recta que une los centros *siempre* pasa por el

punto de contacto de dos circunferencias tangentes exteriores"? Dicho de otro modo, si en la figura los centros de las dos circunferencias son *P* y *Q*, y *A* es el punto de tangencia, ¿qué ocurriría si el segmento *PQ* no pasara por el punto *A*?

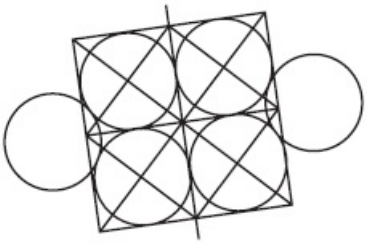
Tendríamos que el segmento *PQ* corta a las circunferencias en sendos puntos *S* y *T*. Y como *PS* y *QT* son radios de las circunferencias, y además, el segmento *PQ* está formado por los segmentos *PS*, *ST* y *QT*, resultaría que *PQ* sería mayor que dos radios.



Pero al mismo tiempo, *sabemos* –por la propiedad triangular– que en el triángulo (¡isósceles!) *PAQ*, la distancia *PQ* es menor que la suma de las longitudes de *PA* y *AQ*. Es decir, que *PQ* es menor que dos radios. Pero entonces llegamos a una contradicción, porque también sería mayor que dos radios.

Esta contradicción se generó al suponer que el segmento *PQ* no pasaba por el punto *A*. Por lo tanto, el segmento *PQ debe* pasar por el punto de tangencia de las dos circunferencias[7].

No es fácil reconocer que la causa de la contradicción reside en la suposición inicial. El dibujo "mal hecho" también puede ser difícil de aceptar[8]. Y aunque sea el profesor quien finalmente desarrolle la demostración en el pizarrón, dar a los alumnos la oportunidad de elaborar sus propias hipótesis y hacer sus conjeturas –por ejemplo, a partir de la pregunta que enunciamos más arriba: "¿qué ocurriría si el segmento *PQ* no pasara por el punto *A*?"–, ofrece sustento a una demostración que, de otro modo, podría parecer caída del cielo.

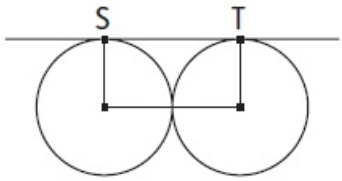


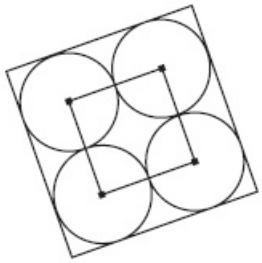
Otra posibilidad de reconstrucción para la figura A es a partir del cuadrado que circunscribe a las cuatro circunferencias centrales, dividiéndolo en cuatro cuadrados iguales y trazando sus diagonales.

¿Por qué las rectas tangentes exteriores forman un cuadrado? Si trazamos los radios perpendiculares al segmento que une los centros de dos circunferencias, la recta

www.elsolucionario.org

perpendicular a cada radio por los puntos *S* y *T* resulta paralela a ese segmento y es tangente a cada una de las circunferencias. Por lo tanto, los lados del cuadrilátero exterior son paralelos a los del cuadrado con vértices en los cuatro centros, y son todos iguales a cuatro radios. Este cuadrado exterior circunscribe a las cuatro circunferencias.

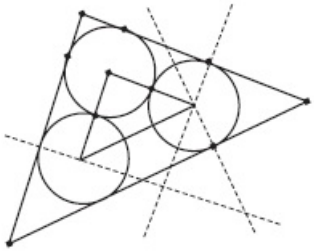




Queda para el lector analizar por qué la intersección de las diagonales de cada cuadradito determina el centro de cada circunferencia.

La figura B

Esta figura se puede reproducir a partir del triángulo que forman los centros de las tres circunferencias. Estudiemos las características de este triángulo en una figura de análisis.



Al unir los centros de las tres circunferencias se forma un triángulo interior.

Como ya vimos, el segmento que une cada par de centros es paralelo a un lado del triángulo exterior. Por tener los ángulos iguales, los dos triángulos son semejantes y por lo tanto el triángulo interior es rectángulo. Además es isósceles porque dos de sus lados miden dos radios. Y el triángulo exterior también resulta isósceles.

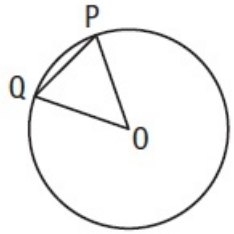
Teniendo en cuenta estas características de los triángulos, se puede realizar la construcción pedida sin dificultad.

Una parada en el camino

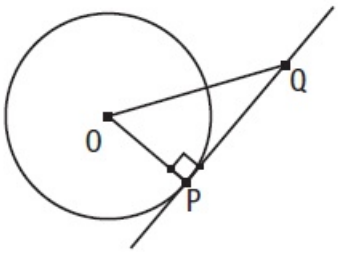
En las construcciones anteriores hemos usado una propiedad bien conocida de las rectas tangentes a una circunferencia (aquellas que la cortan en un solo punto), en la que nos gustaría detenernos: “la recta que pasa por el extremo de un radio de una circunferencia y es perpendicular al mismo, es tangente a la circunferencia”.

Para trabajar esta propiedad en el aula y discutir su validez, proponemos la siguiente actividad de exploración[9]:

Se tiene una circunferencia de centro O. Marcar, si es posible, dos puntos P y Q sobre la circunferencia, de manera tal que el ángulo PQO sea recto.



La imposibilidad de encontrar puntos *P* y *Q* que cumplan con las condiciones pedidas, abre el camino a la búsqueda de razones que la expliquen. Una justificación puede apoyarse en el hecho de que si *P* y *Q* son dos puntos de la circunferencia, el triángulo *POQ* siempre será isósceles, con $P\hat{} = Q\hat{}$, y por lo tanto estos ángulos nunca podrán ser rectos.



Otra justificación posible es analizar que tomando cualquier punto *Q* de la recta perpendicular por *P* al radio *OP*, que no sea *P*, se obtiene un triángulo rectángulo *QPO*, del cual *QO* es su hipotenusa. Por la relación pitagórica, la longitud de ese segmento será mayor que la medida del radio *OP*, y por lo tanto el punto *Q* necesariamente será exterior a la circunferencia.

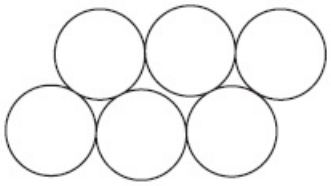
Hilando un poco más fino

Cuando analizamos la figura A, dijimos que el cuadrilátero con vértices en los centros de las cuatro circunferencias es un cuadrado. ¿Afirmamos esto porque visualmente parece un cuadrado o porque hay condiciones geométricas que lo garantizan? Veamos: el texto que acompaña a la figura A informa que todas las circunferencias son iguales, por lo tanto podemos asegurar que los cuatro lados son iguales a dos radios. Sin embargo, no hay nada que indique que los ángulos son rectos.

Consideremos la siguiente figura acompañada del mismo texto:

¿Qué figuras forman en este caso los centros de las circunferencias? De hecho, si en lugar de un cuadrado,

www.elsolucionario.org

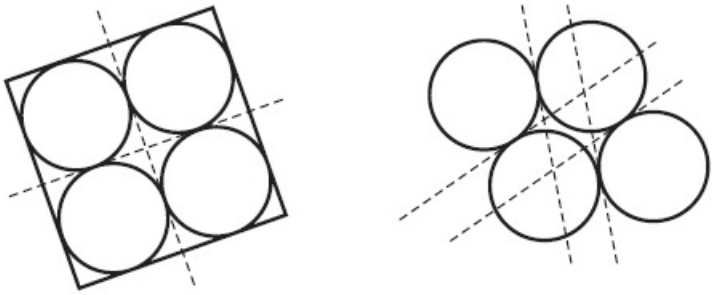


Todas las circunferencias tienen el mismo diámetro. Todos los puntos de contacto son puntos de tangencia.

los centros de las circunferencias determinaran un rombo con ángulos muy cercanos a *90°*, podríamos no notar la diferencia con el dibujo original.

¿Qué le falta al texto para asegurar que sea un cuadrado? ¿Qué propiedades determinan que un rombo sea un cuadrado? Que los ángulos interiores sean rectos, o que las diagonales sean iguales, o que las mediatrices de los lados opuestos coincidan…

Una condición que garantice que nuestra figura sea un cuadrado podría ser: *las tangentes que pasan por los puntos de contacto tienen que coincidir*. Las figuras que siguen muestran un caso donde las tangentes coinciden y otro donde no:



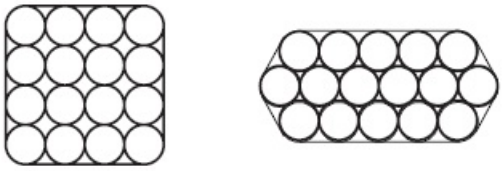
En un primer momento fue intencional que no mencionáramos que se trataba de un cuadrado, para no referirnos explícitamente a los centros de las circunferencias, ni dar condiciones complicadas como ésta. En un momento posterior se puede discutir con los alumnos si la información del texto es suficiente, como lo hicimos aquí.

Pensamos que forma parte del trabajo geométrico aprender a dejar de lado ciertas informaciones visuales y apoyarse en propiedades geométricas. Hay una tensión entre lo que se dice explícitamente de una figura y lo que se percibe visualmente de una representación de esa figura[10]. Para esta actividad nos resultó funcional, en un primer momento, aceptar sin más que era un cuadrado.

Envolviendo latas con plástico

Proponemos un problema que involucra relaciones cualitativas y cuantitativas de las disposiciones de circunferencias tangentes.

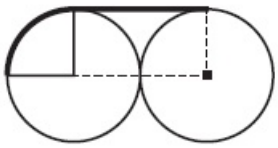
Se empaquetan 16 latas con plástico termocontrayente de dos formas:



Si las latas tienen 10 cm de diámetro, ¿cuánto plástico se necesita para envolverlas en cada caso?

El modelo geométrico de las latas supone que el plástico está perfectamente estirado, de manera que al estar en contacto con las latas se adapta a su curvatura y cuando deja de tocarlas se hace rectilíneo.

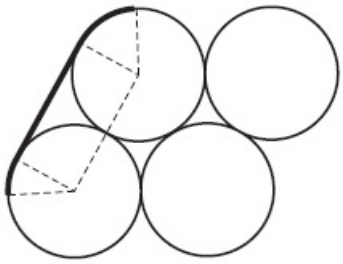
Las partes rectilíneas están formadas por tramos de longitud igual a dos radios porque, como ya vimos, una recta tangente a dos circunferencias es perpendicular a los radios que pasan por los puntos de tangencia y al unir esos dos radios por sus extremos se obtiene un rectángulo –tiene dos lados opuestos iguales y perpendiculares a un tercero–.



En el primer paquete, a partir del punto de tangencia en cada circunferencia "de las esquinas", el plástico se adapta a la forma del arco y recorre un cuarto de circunferencia hasta llegar al otro punto de tangencia.

Se necesitan entonces cuatro veces *3* diámetros para las partes rectas, más cuatro veces *1/4* de circunferencia para las partes curvas, en total: $12\ D + \pi\ D$.

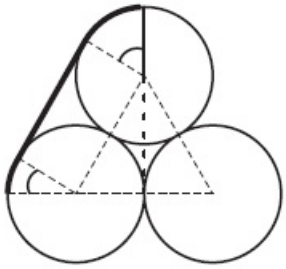
En el segundo paquete, hay que analizar las partes curvas con más detenimiento para decidir hasta dónde se adapta el plástico a cada circunferencia, y dónde la "abandona" y queda rectilíneo. ¿Cuánto miden los arcos de circunferencia entre dos puntos de tangencia?



Podemos recurrir a una figura de análisis en las que trazamos algunos segmentos auxiliares para investigar los ángulos.

Ya analizamos que los centros de las tres circunferencias tangentes forman un triángulo equilátero.

www.elsolucionario.org



Como la altura del triángulo es también bisectriz del ángulo correspondiente, se puede calcular:

$$\alpha = 180° - (90° + 30°) = 60°,$$
$$\beta = 180° - (60°+90°) = 30°.$$

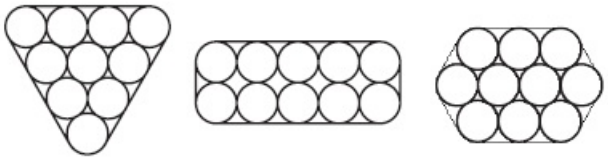
También se puede deducir directamente que: $\alpha + \beta = 90°$.

En total, para el segundo paquete se necesitan *12* diámetros para las partes rectas, más cuatro arcos de *90°* para las partes curvas, en total $12 \cdot D + \pi \cdot D$.

Las dos maneras de acomodar las latas requieren la misma cantidad de plástico: ambos paquetes tienen *12* tramos rectos *(12·D)* y *1* tramo curvo *(π·D)*. Como el plástico da una vuelta entera, ¡la parte curva no puede dar otra cosa que $\pi \cdot D$! Por lo tanto, no es necesario conocer los ángulos para calcular la cantidad de plástico.

¿Siempre se necesita la misma cantidad de plástico para una misma cantidad de latas? Invitamos al lector a elegir una cantidad de latas, acomodarlas de distintas maneras e investigar cuánto plástico se necesita.

Analicemos las tres disposiciones siguientes para *10* latas:



La cantidad de plástico es diferente para cada una de las tres formas: $9 \cdot D + \pi \cdot D$ para el paquete con forma de triángulo, $10 \cdot D + \pi \cdot D$ para el que tiene forma rectangular y $8 \cdot D + \pi \cdot D$ para el otro paquete.

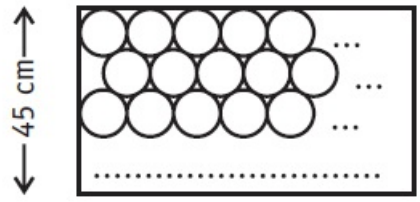
¿De qué depende esta variación? Se abre una nueva pregunta y nuevas variables relevantes: ¿tiene que ver con el área de la figura que queda formada?, ¿se relaciona con la cantidad de puntos de contacto?, ¿con la cantidad de latas del borde?, ¿con la cantidad de latas que no tocan el plástico?, ¿qué interrelaciones hay entre estas cuestiones? Generar una discusión en el aula puede ser muy enriquecedor para todos porque da lugar a la formulación de distintas conjeturas que tanto el docente como los alumnos podrán investigar, sostener ante los otros y también dejar sin respuesta.

Acomodando latas en cajas

Los envoltorios plásticos son flexibles en cuanto a la forma exterior del paquete. Cuando se trata de acomodar latas en cajas, la forma exterior ya está determinada y se generan otras problemáticas.

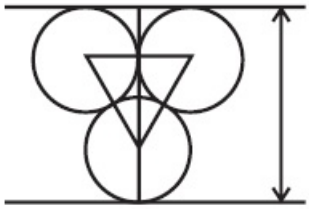
Nos interesan en particular dos disposiciones de latas que llamaremos cuadrada y triangular –según las figuras que formen los centros de las circunferencias–.

¿Cuántas latas de 10 cm de diámetro se pueden acomodar en una caja rectangular de 45cm × 100cm?



Con la disposición cuadrada se pueden acomodar hasta *40* latas. ¿Y con la disposición triangular?

Las limitaciones que impone la caja llevarán a establecer una relación entre el radio de las circunferencias y la altura del triángulo equilátero que forman los centros de tres circunferencias tangentes.



Dos filas de circunferencias necesitan una longitud igual a dos radios más la altura del triángulo equilátero, que se puede calcular usando el teorema de Pitágoras o a partir del seno de un ángulo de *60°*.

El ancho mínimo de una caja para *2* filas de latas resulta así:

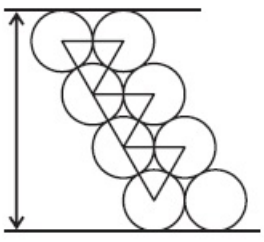
$$10 + \frac{\sqrt{3}}{2} . 10 \cong 18{,}66 \text{ cm}$$

Por cada fila que se agrega, el ancho aumenta en (√3/2) · 10cm con lo cual:

$$\text{para 3 filas} \rightarrow 10 + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cong 27{,}32 \text{ cm}$$

$$\text{para 4 filas} \rightarrow 10 + 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cong 35{,}98 \text{ cm}$$

$$\text{para 5 filas} \rightarrow 10 + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cong 44{,}64 \text{ cm}$$



Habrá que analizar que no en todas las filas entra la misma cantidad de latas: en las filas “pares” entran *9* y en las “impares”, *10*.

www.elsolucionario.org

En total se podrán ubicar: $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 48$ latas.

¿Cuánto desperdicio hay? ¿Se podrán acomodar más latas, por ejemplo *60*? Estas preguntas pueden llevar a calcular la relación entre el área de la caja y el área de una lata: $45 \cdot 100 \div (\pi \cdot 5^2) \cong 57{,}296$, con lo cual no pueden caber nunca más de *57* latas.

Para llegar a una fórmula general que relacione el ancho de una caja con la cantidad de latas que caben, y recuperar el "rastro" perdido en los cálculos anteriores –funcionales sólo al resultado–, se puede trabajar con las mismas dimensiones de la caja y con latitas más pequeñas, de modo que el cálculo numérico directo se vuelva tedioso. Veremos que el cambio de números también traerá otra sorpresa –si es que ya no la trajo en el problema anterior–: no es lo mismo pensar la caja de *45 cm* × *100cm* que pensarla de *100cm* × *45cm*.

Un repositor dijo que una vez en una caja de 45cm × 100cm acomodó 1254 frasquitos de 2 cm de diámetro. ¿Cómo hizo?

La disposición cuadrada permite acomodar $22 \cdot 50 = 1100$ frasquitos. No alcanza. Si bien para saber cuántas filas caben en disposición triangular se puede ir probando hasta *25* filas, pues $2 + 24\,(\sqrt{3}/2) \cdot 2 \cong 43{,}57$ *cm*, una cuestión 2 de economía puede llevar a generalizar el cálculo:

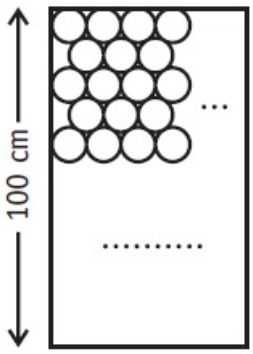
para n filas $\rightarrow 2 + (n1)\,(\sqrt{3}/2) \cdot 2 \leq 45$

de donde resulta $n \leq 25{,}8\ldots$, es decir, que podrán acomodarse a lo sumo *25* filas –aunque algunos alumnos podrían redondear a *26*–. Distinguiendo nuevamente entre filas pares e impares, se puede calcular que de este modo caben $13 \cdot 50 + 12 \cdot 59 = 1238$ frasquitos. ¡Tampoco alcanza! ¿Cómo hizo el repositor?

Pues bien, en *100 cm* caben *57* filas de frasquitos de *2 cm* de diámetro, ya que

$$2 + 56\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \leq 100 \quad y \quad 2 + 57\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 > 100$$

Pero ahora se pueden acomodar *22* frasquitos en todas las filas (¿por qué ahora da igual en las filas pares y en las impares?).



Vale decir que efectivamente se pueden acomodar $28 \cdot 22 + 27 \cdot 22 = 57 \cdot 22 = 1254$ frasquitos.

Ahorrando cartón

El siguiente problema permite analizar que el área de la base de una caja puede aumentar, sin que por ello aumente la cantidad de latas que se pueden acomodar, e incluso la cantidad de latas puede llegar a disminuir.

Para aprovechar el cartón del que disponía, un fabricante hizo cajas de 40 cm × 115 cm en lugar de las cajas de 45cm × 100cm que le habían encargado. Le dijo a su cliente que le iba a entrar una lata más en estas cajas porque el área había aumentado en 100 cm2, que es más que el área que ocupa una lata de 10cm de diámetro. Pero el cliente protestó diciendo que en esas cajas sólo entraban

46 latas. ¿Cuál de los dos tiene razón?

Un problema con más de trescientos años

Buscando cuál es la manera más eficiente de amontonar partículas para que ocupen el menor volumen posible, el matemático y astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) conjeturó que el empaquetamiento más denso de esferas es acomodarlas como los vendedores de frutas. Unos trescientos años después, el problema seguía sin resolver.

Recién en 1909 el matemático noruego Axel Thue lo demostró para dos dimensiones, asegurando que la disposición triangular es la más eficiente para "empaquetar" círculos en el plano.

El problema original de Kepler demoró casi un siglo más en ser demostrado en tres dimensiones por Tom Hales. La demostración, de más de 250 páginas, se apoya en numerosos cálculos realizados con computadora y aún no ha sido verificada completamente por la comunidad matemática.

6 Para organizar un dictado de figuras se divide a la clase en un número par de grupos, una mitad serán grupos A, y la otra mitad, grupos B. Cada grupo A trabaja en equipo con un grupo B. En una primera etapa, cada grupo A tiene que escribir un mensaje que contenga todas las informaciones que considere necesarias para que su grupo B pueda reproducir la figura A sin verla; y cada grupo B hará lo propio para que su grupo A pueda reproducir la figura B, también sin verla. En una segunda etapa, cada grupo reconstruye la figura siguiendo las instrucciones del mensaje elaborado por sus compañeros de equipo. Las copias se considerarán correctas si se pueden superponer con los originales. El análisis de los distintos mensajes producidos por los alumnos permite identificar las propiedades utilizadas. Para un análisis de este tipo de actividad se puede de actividad se puede consultar en Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman (1998).

7 Esta demostración por el absurdo es en esencia la misma que da Euclides (1991: prop. 12, Libro III).

8 Henri Poincaré dijo: "La geometría es el arte de razonar bien con figuras mal hechas".

9 Actividad tomada de Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2004). También en Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2007).

10 "La figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto" en Sadovsky, Parra, Itzcovich y

www.elsolucionario.org

Broitman (1998).

CAPÍTULO III

La letra chica de un préstamo bancario

En este capítulo pondremos la lupa sobre la matemática que se esconde detrás de la letra chica de un préstamo bancario.

Comenzamos con una actividad que permite adentrarse en el lenguaje bancario y entender el funcionamiento iterativo de un préstamo, en particular del sistema de amortización francés, que es el más usado para los préstamos hipotecarios.

¿Cómo se calcula el valor de la cuota para un plazo de n meses? Resulta ser un problema de bastante complejidad para el aula. Pero si preguntamos por el plazo del préstamo, en lugar de preguntar por el valor de la cuota, se hace más accesible, sin por ello eludir la complejidad del proceso iterativo subyacente. Analizaremos la dificultad que presenta el cálculo de la cuota y cómo se transforma el problema al cambiar el lugar de la incógnita.

Trabajaremos con dos modelizaciones de la situación: un algoritmo recursivo y una fórmula cerrada. La resolución numérica del modelo recursivo incluye la computadora, específicamente la planilla de cálculo. Encontrar la fórmula cerrada involucra la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica. Para tratar el cálculo de esta suma, en la segunda parte del capítulo proponemos tres problemas que también se pueden trabajar en forma independiente del problema del préstamo.

¿De qué se trata?

www.elsolucionario.org

Un aviso en el diario ofrece préstamos bancarios: “Superpréstamos 1000/30. Cada $1.000 pagás sólo $30 fijos por mes en 60 cuotas. Para lo que quieras: ¿querés remodelar tu casa?, ¿equipar tu estudio?, ¿irte de vacaciones? Desde $1.000 hasta $50.000.” Miramos la letra chica que dice: “TNA 26.10%; TEM 2.175 % amortización francés. Cuota promedio total incluye capital e interés.”

Vamos a un banco para que nos expliquen estas condiciones. Es una tarea que los alumnos pueden realizar.

¿Qué significan las siglas TNA y TEM? Tasa Nominal Anual y Tasa Efectiva Mensual. Son los porcentajes de interés que el banco cobra por el servicio de prestar dinero. La TEM es la TNA dividido *12* y es la tasa que se usa efectivamente para hacer los cálculos.

¿Qué es amortización? Cada cuota se compone de dos partes: una de intereses, que se calcula como un porcentaje sobre el saldo de la deuda, y otra de devolución del capital prestado, que se llama amortización.

Cuota	=	Amortización	+	Intereses
		↓		↓
		Cancelación de deuda		TEM. x Saldo Anterior

La suma de todas las amortizaciones es el monto total prestado. La suma de todos los intereses es el costo total del préstamo.

Además nos informan que hay dos sistemas de amortización: el francés y el alemán. En el sistema francés todas las cuotas son iguales, mientras que en el sistema alemán, lo que es fijo no es el valor de la cuota, sino el monto de amortización que se devuelve con cada una. No parece sencillo. Pero se hace necesario entenderlo si se quiere saber bien el lío en el que uno se mete al pedir un préstamo bancario. Para familiarizarnos con el funcionamiento y la terminología específica, trabajaremos primero con dos ejemplos donde el plazo del préstamo es breve y permite explicitar todos los cálculos que están en juego.

Para el sistema alemán elegimos el siguiente problema: *Un señor pide un préstamo personal por $2.000 a un banco. Le informan que los préstamos personales se pagan en 4 meses según el sistema alemán y con una tasa de interés anual nominal del 12%.*

¿Cuánto tendrá que pagar cada uno de los 4 meses?

¿Cuánto pagará en total de intereses, es decir, cuánto le costará el préstamo?

Veamos:

Veamos:
TEM = TNA / *12 = 0,12 / 12 = 0,01*

- Cuota 1 = *2000/4 + 0,01 · 2000 = 500 + 20 = 520*
  → Saldo 1 = *2000 - 500 = 1500*
- Cuota 2 = *2000/4 + 0,01 · 1500 = 500 + 15 = 515*
  → Saldo 2 = *1500 - 500 = 1000*
- Cuota 3 = *2000/4 + 0,01 · 1000 = 500 + 10 = 510*
  → Saldo 3 = *1000 - 500 = 500*

Y para el sistema francés:

Al mismo señor le informan, en otro banco, que ellos trabajan con la misma tasa nominal anual del 12%, pero con el sistema francés. Y que su cuota sería de $512,56 a pagar en 4 meses. ¿Cuál es el costo de este préstamo?

¿Cuánto hay que pagar si se salda la deuda antes de término, junto con la segunda cuota? ¿Y cuánto se reduce el costo del préstamo?

Hagamos las cuentas:

- Cuota 1 =
  512,56 = Amortización 1 + $\underbrace{2000 \,.\, 0{,}01}_{20{,}00}$ → Amortización 1 = 492,56
  → Saldo 1 = 2000 - 492,56 = 1507,44
- Cuota 2 =
  512,56 = Amortización 2 + $\underbrace{1507{,}44 \,.\, 0{,}01}_{15{,}07}$ → Amortización 2 = 497,49
  → Saldo 2 = 1507,44 - 497,49 = 1009,95
- Cuota 3 =
  512,56 = Amortización 3 + $\underbrace{1009{,}95 \,.\, 0{,}01}_{10{,}10}$ → Amortización 3 = 502,46
  → Saldo 3 = 1009,95 - 502,46 = 507,49
- Cuota 4 =
  512,56 = Amortización 4 + $\underbrace{507{,}49 \,.\, 0{,}01}_{5{,}07}$ → Amortización 1 = 492,56
  → Saldo 4 = 507,49 - 507,49 = 0

El costo del préstamo es *$50,24 = $20 + $15,07 + $10,10 + $5,07.*

Las otras dos preguntas tienen la intención de poner el foco en aspectos particulares del préstamo: el saldo y el interés sobre saldo. Al pagar toda la deuda junto con la segunda cuota, se debe abonar el saldo correspondiente a ese momento, o sea *$1009,95*. Y en ese caso el total de intereses sería de *$35,07 = $20 + $15,07* y el costo total del préstamo se reduciría en *$15,17 = $50,24 $35,07*.

El sistema francés

Una vez entendido el funcionamiento del sistema francés, proponemos el siguiente problema que contempla el punto de vista de un cliente al que se le ha informado el valor de la cuota:

Si un banco concede un préstamo de $50.000 con el sistema de amortización francés, TNA del 10% y una cuota fija de $660,75 por mes,

www.elsolucionario.org

¿Cuál será el saldo después de pagar 20 cuotas?
¿En cuántas cuotas se pagará toda la deuda?
¿Cuánto dinero se pagará en total?
¿Cuánto se pagará en total de intereses?

Proponemos pensar junto con el lector para responder a cada una de las preguntas. Veamos la primera: ¿cuál será el saldo después de *20* meses?

• La TEM es *0,10/12 = 0,008333...*, llamemos *r* a ese número.
• El interés se calcula sobre el saldo de la deuda, de forma que en la primera cuota el interés será $r \cdot 50000 = 416,67$.

Por lo tanto, la amortización de la deuda en la primera cuota, o sea, lo que realmente le devolveremos al banco con la primera cuota, será:

$A_1 = 660,75\ r \cdot 50000 = 660,75\ 416,67 = 244,08$

y tendremos un saldo

$S = 50000 - A_1 = 50000 - 244,08 = 49755,92$.

Siguiendo el mismo razonamiento, el interés en la segunda cuota será $r \cdot S_1$ y la amortización correspondiente resulta:

$A_2 = 660,75\ r\ .\ S_1 = 660,75\ 414,63 = 246,12$

con lo cual, el saldo después de pagar la segunda cuota será:

$S_2 = S_1 - A_2 = S_1 - (660,75 - r \cdot S_1) = 49509,79$.

Generalizando, podemos calcular el saldo después de pagar una cuota a partir del saldo anterior:

$S_k = S_{k-1} - a_k = S_{k-1} \cdot (660,75 - r \cdot S_{k-1})$.

Para calcular el saldo después de pagar *20* cuotas, este algoritmo iterativo se hace muy tedioso. Podemos investigar si hay alguna fórmula que calcule los saldos directamente a partir de los datos, sin utilizar explícitamente saldos anteriores. Pero podemos recurrir a una herramienta informática que haga las cuentas por nosotros.

La computadora en la clase de matemática

La computadora se puede integrar al trabajo en el aula enriqueciendo la actividad de los alumnos. El uso de una planilla de cálculo en la resolución del problema del préstamo incluye tareas como reconocer las variables en juego y explicitar las relaciones entre ellas, ya que hay que escribir fórmulas en los casilleros. Fórmulas que, a su vez, estarán interrelacionadas de alguna manera. Vale decir que la planilla de cálculo no remplaza el trabajo de modelización. Este trabajo sigue estando en manos de los alumnos[11].

En nuestro problema, las fórmulas de una planilla podrían ser $Sk = Sj\text{-}1\ (660,75 - r\ .\ Sk\text{-}1)$ para los meses $k = 1, 2, 3, 4,...$

	A	B	C	D	F
1	Cuota N°	Saldo			
2		50000,00			
3	1	= B2 – (660,75 – r*B2)			
4	2	= B3 – (660,75 – r*B3)			
5	3	= B4 – (660,75 – r*B4)			
6	4	= B5 – (660,75 – r*B5)			
7	5	...			
8	6	...			

donde *r* es *0,00833*, y los saldos sucesivos aparecen en los casilleros B2, B3, B4,...

	A	B	C	D	F
1	Cuota N°	Saldo			
2		50000,00			
3	1	49755,92			
4	2	49509,80			
5	3	49261,63			
6	4	49011,39			
...	...	...			
21	20	44711,81			
...	...	...			
122	120	0			

Los valores numéricos que vemos no son números fijos, sino que están determinados por las relaciones que escribimos en los casilleros. Si modificamos el monto inicial de *$50000* por *$10000*, la planilla modificará todos los valores automáticamente según las relaciones establecidas.

El saldo después de la cuota *20* y la cantidad total de cuotas del préstamo se pueden leer directamente de la planilla de cálculo. Vemos que en la cuota *120* el saldo se anula. Esto quiere decir que la cantidad de cuotas para liquidar el préstamo es *120*. También estamos en condiciones de responder a las preguntas c) y d): en total se pagarán *120* . *$660,75* = *$79290,00*, y como el préstamo es de *$50000* lo que se pagará de intereses es *$29290*. ¡Nada menos que un *59%*!

Controlando los resultados

En la planilla anterior se calculan recursivamente los saldos: $S_k = S_{k-1}$ (*660,75* – *r* . S_{k-1}), hasta llegar a cero. Podríamos desglosar cada paso del algoritmo en tres etapas:

• $I_k = r \cdot S_{k-1}$: el interés de la cuota *k*, a partir del saldo anterior;

www.elsolucionario.org

• $A_k = (660{,}75 - I_k)$: la amortización correspondiente, descontando el interés de la cuota;

• $S = S_{k-1} - A_k$: cálculo del nuevo saldo a partir de la amortización A_k.

De esta manera, cada columna representa explícitamente una de las variables en juego y, nuevamente, lo importante es cómo expresamos la relación entre las variables: donde *r* es nuevamente *0,00833*.

	A	B	C	D
1	Cuota N° *(k)*	Interés *(I_k)*	Amortización *(A_k)*	Saldo *(S_k)*
2				50000,00
3	1	= r * D2	= 660,75 – B3	D2 – C3
4	2	= r * D3	= 660,75 – B4	D3 – C4
5	3	= r * D4	= 660,75 – B5	D4 – C5
6	4	...	...	...

En esta segunda planilla hay más información a la vista: el interés y la amortización de cada cuota. Esta presentación de los números permite chequear el procedimiento: si se hicieron las cosas bien, la suma de las amortizaciones (la columna C) debería dar por resultado el monto total del préstamo.

También se puede verificar el valor de la suma de las amortizaciones en la primera planilla agregando una columna de "amortización mensual", calculada a partir de los saldos: $A_k = S_k - S_{k-1}$

Limitaciones de la planilla de cálculo

La herramienta informática ha permitido un trabajo intermedio entre lo aritmético y lo algebraico ya que, si bien las variables no están representadas por letras sino por referencias a casilleros, funcionan como variables y no como números. Como el proceso se termina en una cantidad finita de pasos –en nuestro caso particular, *120*–, seguro que existirá una fórmula explícita que exprese la relación entre las variables en juego (monto total del préstamos, el valor de la cuota, el plazo y la tasa de interés *r*), aunque más no sea haciendo sustituciones "para atrás" en cada uno de los *120* pasos. Sin embargo, la planilla no permite encontrarla.

¿Cómo calcula entonces el banco el valor de la cuota para un plazo de n meses?

Invitamos al lector a buscar respuesta a esta pregunta antes de seguir leyendo. Aunque puede resultar bastante complejo.

La potencia del álgebra

La mayor dificultad es elegir las variables que permiten desatar un nudo que parece no tener salida: la cuota desconocida se compone de una amortización, también desconocida, y de un interés sobre el saldo anterior, que también es desconocido porque no se conoce la amortización anterior. A no desesperar. Pongamos todas las variables sobre la mesa:

- M: el monto total del préstamo;
- r: la tasa efectiva de interés mensual TEM;
- n: el plazo de pago en meses;
- c: el valor de la cuota;
- A_k: la amortización correspondiente a la cuota k;
- $S_k = M - A_k$: el saldo después de pagar la cuota número k;
- $I_k = r \cdot S_k - A_k$: los intereses que se pagan con la cuota k.

y concentrémonos en los saldos:

$S_1 = M - A_1 = M - (c - I_1) = M - (c - r \cdot M) = M \cdot (1 + r) - c$

Del mismo modo:

$S_2 = S_1 - A_2 = S_1 - (c - I2) = S_1 - (c - r \cdot S_1) = S1 \cdot (1 + r) - c$

y sustituyendo $S1$ por la expresión anterior resulta:

$S = [M \cdot (1 + r) - c] \cdot (1 + r)\, c = M \cdot (1 + r)2 - (1 + r) \cdot c - c$

Así siguiendo:

$S_3 = S_2 - A_3 = S_2 - (c - r \cdot S_2) = S_2 \cdot (1 + r) - c = M \cdot (1 + r)^3 - (1 + r)^2 \cdot c - (1 + r) \cdot c - c$,

$S_4 = S_3 - A_4 = S_3 - (c - r \cdot S_3) = S_3 \cdot (1 + r) - c = M \cdot (1 + r)^4 - (1 + r)^3 \cdot c\,(1 + r)^2 \cdot c - (1 + r) \cdot c - c$.

A partir de estas igualdades se puede pensar en una fórmula general para calcular el saldo mes a mes, conociendo el monto original M, la tasa de interés r y la cuota c:

$$S_k = M \cdot (1 + r)^k - (1+r)^{(k-1)} \cdot c - (1 + r)^{(k-2)} \cdot c - \ldots - (1 + r) \cdot c - c$$
$$= M \cdot (1 + r)^k - \sum_{i=0}^{k-1} (1+r)^i \cdot c$$

¿Es posible simplificar esta fórmula? Sí, recurriendo a la suma de una progresión geométrica[12]. El saldo después de pagar la cuota k resulta así:

$$S_k = M \cdot (1 + r)^k - \sum_{i=0}^{k-1} (1 + r)^i \cdot c = M \cdot (1 + r)^k - \frac{(1+r)^k - 1}{r} \cdot c$$

Sin embargo, seguimos en la encrucijada: conocemos el monto M y la tasa r pero no conocemos la cuota c. ¿Cómo calcular entonces el saldo? Y si no conocemos los saldos, ¿cómo calcular la cuota? Pensemos un poco más. Hay un saldo del que tenemos información: el último saldo, el del mes n. Porque cuando se termina de pagar la deuda

www.elsolucionario.org

¡el saldo es nulo! Podemos escribir:

$$0 = S_n = M \cdot (1 + r)^n - \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot c$$

y ahora sí podemos despejar el valor de la cuota:

$$c = \frac{M \cdot r \cdot (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

Para facilitar el cálculo de *c* también podemos transformar la expresión anterior:

$$c = \frac{M \cdot r \cdot (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

El tratamiento algebraico permitió encontrar una fórmula para calcular el valor de la cuota directamente a partir de los datos. Ésta es una tarea que la planilla de cálculo no puede suplir, y que pone de manifiesto la potencia del cálculo algebraico.

Aunque no es lo mismo que tener una fórmula cerrada, también sería posible hallar el valor de la cuota usando una planilla de cálculo como la elaborada anteriormente –donde la cuota era dato–, eligiendo valores por tanteo hasta encontrar un valor que haga anular el saldo al cumplirse el plazo de pago.

En los problemas que presentamos sobre el sistema francés –uno desde el punto de vista del cliente, y otro desde el punto de vista del banco– se ponen en juego relaciones entre las mismas variables. Sin embargo, se trata de problemas diferentes porque no se pueden resolver de la misma manera. La complejidad varía por el solo hecho de intercambiar datos e incógnitas. En nuestro proceso de elaboración, inventamos el problema del cliente después de habernos topado con las dificultades que presenta el problema de calcular la cuota. Y además, para facilitar la organización de las variables, elegimos una formulación del primer problema que pone el foco en los saldos.

El sistema alemán y el sistema francés en comparación

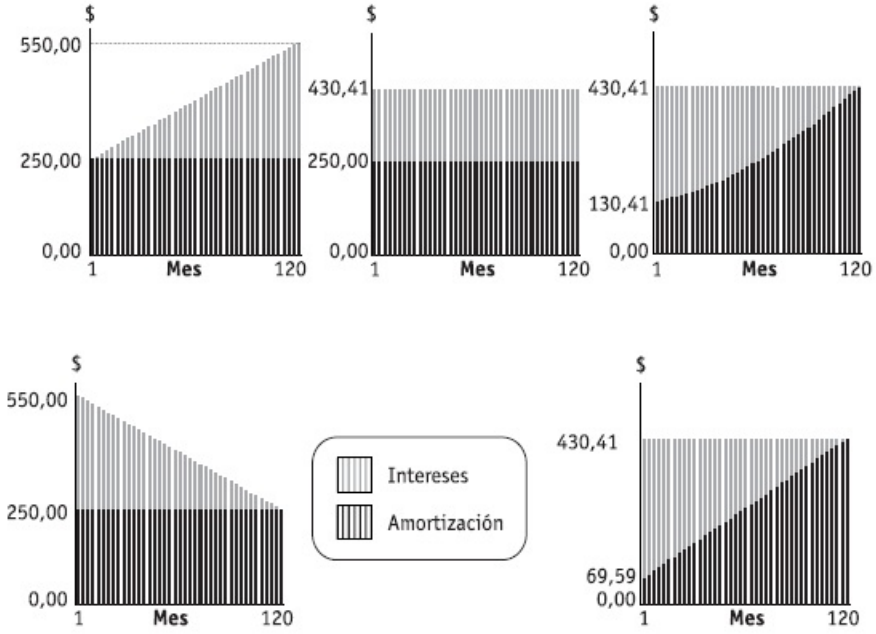
Como mencionamos al principio del capítulo, existe otro sistema de amortización, el sistema alemán, donde lo que es fijo no es el valor de la cuota sino el monto de amortización que se devuelve con cada cuota.

Para comparar los costos de los dos sistemas a igual monto, interés y plazo proponemos la siguiente actividad:

Dos de los siguientes gráficos representan planes de pago de un préstamo, uno con el sistema alemán, y otro con el sistema francés, ambos a 120 meses, por el mismo monto y con la misma tasa de interés.

a) ¿Cuáles son esos dos gráficos?

b) ¿Cuál de los dos sistemas es más caro? ¿Por qué sigue existiendo? ¿Qué ventajas tiene sobre el otro?



El análisis de los gráficos y las informaciones que éstos portan permite revisitar algunas características de los dos sistemas desde un punto de vista cualitativo:

• los intereses disminuyen con cada cuota porque se calculan sobre el saldo, y el saldo va disminuyendo con cada cuota;

• los intereses de la primera cuota son los mismos para ambos sistemas;

• la primera cuota del sistema alemán es mucho mayor que la primera cuota del sistema francés;

• la cuota del sistema alemán disminuye, mientras que la del sistema francés es fija;

• las amortizaciones del sistema francés aumentan con cada cuota y las del sistema alemán son constantes;

• el costo de cada préstamo se puede calcular aproximadamente como el área entre la "curva" que corresponde al valor de la cuota y la "curva" de la amortización;

• el sistema alemán siempre es más barato: el "área" de los intereses es menor.

Más letra

Además de requerir un proceso iterativo de cierta complejidad, el problema del préstamo involucra una suma de potencias en los cálculos. En esta sección presentamos al gunos problemas que se pueden trabajar antes del problema del préstamo, o en forma independiente, que permiten tratar las dos cuestiones siguientes: por un lado, la posibilidad de calcular recursivamente una suma de potencias y, por otro, analizar la existencia de una fórmula para calcular $1 + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + an$. Al mismo tiempo, el problema de la suma de potencias también permite trabajar con una planilla de cálculo,

www.elsolucionario.org

pero sin tener que enfrentar la complejidad de las fórmulas involucradas en el préstamo. En este sentido, nos parece un preámbulo interesante.

¿Cómo hacemos para construir un problema que sirva a nuestro objetivo?

En primer lugar, tratamos de ubicar situaciones donde la fórmula que nos interesa sea necesaria para contestar la pregunta que hagamos. ¿En qué situaciones es necesario sumar potencias de un número? La propagación de un rumor, de un virus, una cadena, la reproducción de plantas y animales, la leyenda sobre el pago ofrecido a quien inventó el ajedrez en la que se iba duplicando el número de granos de trigo por cada uno de los 64 escaques. El libro *Matemáticas recreativas* de Y. Perelman (1935) presenta muchos de estos ejemplos. Entre ellos, hay una situación que se llama "El trato ventajoso" y que podemos describir así:

Un trato ventajoso

Un señor le ofrece un trato a un millonario ansioso de ver crecer sus millones, que consiste en intercambiar sumas de dinero de la siguiente forma: "cada día, durante un mes –le dice el señor al millonario–, le entregaré cien mil pesos. Pero desde ya que no lo haré gratis. A cambio, el primer día usted deberá darme 1 centavo. Por los segundos cien mil pesos pagará usted 2 centavos. Y después, por los terceros cien mil pesos, 4 centavos; por los cuartos, 8; por los quintos, 16. Y así durante todo el mes. Cada día pagará usted el doble que el anterior." En este intercambio, el millonario ve un negocio y cierra el trato.

En el libro hay un análisis de cuánto dinero debió pagar finalmente cada uno de los dos hombres: a fin de mes, el señor ha pagado *30* veces cien mil pesos, es decir, tres millones de pesos. Y el millonario habrá pagado, en centavos, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{29}$, lo cual representa más de diez millones de pesos. Esta es la "magia" del crecimiento exponencial, que no deja de asombrar aun al que cree conocerla. En este caso, el asombro resulta de confrontar un crecimiento lineal con uno exponencial.

Bajo la hipótesis de que es muy probable que los alumnos supongan, al igual que el millonario, que el pobre hombre que ofrece semejante trato está loco, se les podría preguntar si ellos lo aceptarían si estuvieran en el lugar del millonario. O sea, estaríamos apelando a hacer un uso didáctico de la perplejidad que generan los resultados que contradicen nuestra intuición.

Una vez planteada la pregunta de si el trato les parece conveniente –aclarando que el desconocido es de fiar, en cuanto a que paga con dinero que no es falso–, está claro que los alumnos no se van a apurar a contestar, aunque a primera vista estén bastante seguros de que sería un excelente negocio. El hecho de que el docente plantee la pregunta ya los hará dudar, o al menos investigar un poco para fundamentar su respuesta. Sin embargo, la elección de los datos del problema permite sostener la incertidumbre hasta el final, pues recién en el día *25* se deben pagar más de cien mil pesos, y el total de lo pagado supera al total pagado por el desconocido recién el día *29*. Asimismo, el hecho de que todo se acabe en sólo *30* días, además de garantizar la finitud del proceso, no excluye la posibilidad de calcular los montos uno por uno hasta el final.

Para resolver el problema, está bien claro que en definitiva lo "único" que hay que

hacer es calcular cuánto pagó cada uno al final del mes. Y justamente, sumar la serie $1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 229$ se hace necesario, ya sea que se haga a mano o en una planilla de cálculo.

Una posible organización de la información es armar una tabla de valores donde estén anotados los pagos diarios y el total pagado hasta cierto momento del mes:

Día	Pago de ese día (en centavos)	Pago acumulado (en centavos)	Total pagado por el señor (en pesos)
1	1	1	100.000
2	2	3	200.000
3	4	7	300.000
4	8	15	400.000
5	16	31	500.000
6	32		600.000
...	...	...	...

Cuando hablamos de "tabla", no estamos pensando exclusivamente en el formato que le dimos aquí, sino también en cuentas más o menos sueltas que responden a esta organización mental. Además, no necesariamente los alumnos van a incluir (los cálculos de) la última columna, porque su actividad se centrará en calcular lo que paga el millonario, que en principio no puede calcularse directamente a partir de los datos. En la discusión general del problema, el docente puede dibujar una tabla e incluir –o no– esta última columna.

Los valores de la tercera columna de la tabla $(1 + 2 + 22 + \ldots + 2n)$ dan siempre una unidad menos que los valores de la fila siguiente de la segunda columna $(2n + 1)$. Esto abre la pregunta de si siempre será así y por qué. Los alumnos pueden jugar con la planilla de cálculo para constatar que efectivamente es así, lo cual reforzará la conjetura. Pero que algo sea cierto para muchos ejemplos, en matemática no alcanza: toda generalización exige una explicación o demostración apoyada en relaciones matemáticas.

Se puede aprovechar la herramienta informática como fuente de conjeturas, pero hay que tener cuidado ya que los numerosos ejemplos que provee la planilla, por su facilidad de cálculo, se pueden convertir en un obstáculo para generar la necesidad de una demostración. Habrá que insistir en la búsqueda de las razones que se esconden detrás de una regularidad. Por ejemplo, preguntando qué es lo que hace que se cumpla la igualdad $1 + 22 + 23 + 24 + \ldots + 2n = 2n+1\ 1$. No estamos esperando, necesariamente, que los alumnos produzcan una demostración. Esto puede suceder o no. Pero si no sucede lo puede demostrar el profesor.

El intento de explicar por qué funciona la fórmula lleva a una exploración de los números que puede aportar a la comprensión de la demostración, aun cuando ésta sea presentada finalmente por el docente. De hecho, la primera demostración que proponemos no es difícil de entender, pero representa un "truco técnico" que los

www.elsolucionario.org

alumnos pueden no conocer y es una buena oportunidad de mostrárselos.

A continuación presentamos cuatro demostraciones posibles:

1) El clásico "truco técnico": si llamamos S a la suma de $1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2n$, tenemos que $2 \cdot S = 2 \cdot (1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2n) = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 1$, de donde se obtiene –restando miembro a miembro– que $S = 2^{n+1} - 1$.

2) Apoyándose en la relación $(a - 1) \cdot (1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para $a = 2$, que los alumnos pueden conocer como relación algebraica o como igualdad de polinomios.

3) Cercana a una posible intervención docente: sumando 1 a $1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2n$ se produce una "avalancha":

$$\begin{aligned} 1 + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) &= (1 + 1) + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = 2 + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = \\ &= (2 + 2) + (2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = 4 + (4 + 2^3 + \ldots + 2^n) = \\ &= (4 + 4) + (8 + \ldots + 2^n) = 8 + (8 + 2^4 + \ldots + 2^n) = \ldots = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

4) Perlita para el lector: un cuarto procedimiento, fuertemente relacionado con el anterior, es trabajar en base 2, pues en base 2 las potencias de 2 están representadas por un *uno* seguido de tantos *ceros* como la potencia en cuestión. Por eso en base 2 es muy sencillo sumar potencias de 2: resulta un número con tantos *unos* como

Representación en base 10	Representación en base 2
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$	$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots + \ldots + \underbrace{100\ldots00}_{n \text{ ceros}} = \underbrace{111\ldots111}_{(n+1) \text{ unos}}$
2^{n+1}	$\underbrace{100\ldots000}_{(n+1) \text{ ceros}}$
$2^{n+1} - 1$	$\underbrace{111\ldots111}_{(n+1) \text{ unos}}$

potencias de 2 se sumen (incluida 2^0). Además, el número anterior a 2^{n+1}, es decir, $2^{n+1} - 1$, es el mayor número que necesita $n + 1$ lugares, o sea, un número formado por $n + 1$ *unos*.

Las demostraciones 1, 2 y 4 se pueden adaptar para cualquier número natural, y las demostraciones 1 y 2, para cualquier número real. Pero la demostración 3 está hecha a medida de $a = 2$, ya que se apoya en que $2 + 2 = 2.2$, $4 + 4 = 2.(2 + 2) = 2.(2.2)$, etc. Invitamos al lector a generalizar

las demostraciones para $a \neq 2$.

Para poner en funcionamiento la fórmula encontrada, se pueden agregar preguntas al problema original del trato.

i) ¿Cuáles serían los montos totales si el trato fuera por dos meses?

ii) ¿Cuánto sería lo máximo que podría pagar por día el señor al millonario para impresionarlo aún más y no perder dinero?

iii) ¿Después de cuánto tiempo la suma total que paga el millonario superará el billón de pesos?

Esta última cuestión se reduce a encontrar la menor potencia de 2 que es mayor que cien billones.

La propagación de un virus informático

Como ya dijimos, las demostraciones anteriores son adaptables en mayor o menor medida a cualquier número real a, pero en realidad fueron hechas para $a = 2$.

El siguiente contexto permite trabajar con la fórmula para valores de $a = 2$ y $a = 11$, y en particular poner de relieve el factor $a\ 1$.

Un virus informático está programado para reenviarse a dos nuevas computadoras después de un minuto de la primera infección, y las infecta de inmediato. El segundo minuto infecta a 4 computadoras más, y el tercer minuto infecta a 8 computadoras más.

a) ¿Cuánto tiempo necesitará para infectar un millón de computadoras? ¿Y para infectar mil millones de computadoras?

b) ¿Cuántos minutos tardaría el virus en infectar mil millones de computadoras si en lugar de infectar a dos computadoras nuevas cada vez, infectara a 11?

Estamos suponiendo que siempre se infectan computadoras nuevas, lo cual es una simplificación –voluntaria– de la realidad que nos permitirá trabajar matemáticamente con el modelo. ¡Pero no hay que olvidar este supuesto en el momento de interpretar los resultados!

Para resolver la parte a), no hay más que reinterpretar los números del problema del trato en otro contexto. Pareciera entonces que se está haciendo más de lo mismo. En parte, es cierto. Aunque esto no sorprenda tanto como el problema del “trato ventajoso”, no es algo menor tomar conciencia del tamaño de los números, anticipando que en media hora se pueden haber infectado todas las computadoras del mundo.

Una tabla que organice los datos para la parte b) en base 11, ya sea a mano o en la planilla de cálculo, será algo así:

www.elsolucionario.org

Tiempo en minutos	Nuevas infecciones	Total de computadoras infectadas
0	1	1
1	11	12
2	121	133
3	1331	1464
4	14641	16105
5	161051	177156
6	1771561	1948717
7	19487171	
...	...	...

La pregunta del problema se puede contestar fácilmente porque después de *10* minutos ya se infectaron más de mil millones de computadoras. Pero vamos a correr el foco hacia la relación que vuelve a darse entre los números de la segunda y tercera columnas:

$$1 + 11 + 11^2 + \ldots + 11^n \cong \frac{11^{n+1}}{10} \text{ , ó}$$

$$10 . (1 + 11 + 11^2 + \ldots + 11) \cong 11^{n+1}$$

y afinando la estimación:

$$1 + 11 + 11^2 + \ldots + 11^n \cong \frac{11^{n+1} - 1}{10} \text{ , ó}$$

$$10 . (1 + 11 + 11^2 + \ldots + 11) \cong 11^{n+1} - 1$$

Nuevamente: ¿por qué pasa esto? Una tabla en la planilla de cálculo fortalece la conjetura de que esto será siempre así. ¿Qué está pasando acá? ¿Cómo se explica esta "casualidad"? A diferencia de la base *2*, la base *11* permite explicitar el factor *10 = 11 – 1*, en vistas a una generalización de la fórmula *(a 1) · (1 + a + a2 + ... + an) = an + 1 – 1*.

Un problema con "a" no natural

Proponemos ahora un problema que responde al modelo de una progresión geométrica y que, por tratarse de un plan de ahorro, nos acerca al contexto del préstamo bancario.

En un plan de ahorro se depositan todos los meses $100 a un interés mensual del

0,8%. El banco calcula todos los meses el interés sobre el monto total acumulado, incluidos los intereses anteriores.

a) ¿Cuánto dinero se ahorra en un año?

b) ¿Y si se depositan $300 por mes?

c) ¿Cuánto habría que depositar por mes para ahorrar $10.000 en 5 años, al mismo interés?

La situación real es más sencilla que la del préstamo, aunque su modelización también "se las trae". También aquí vamos a analizar dos modelizaciones posibles: una recursiva y otra mediante una fórmula cerrada. El modelo recursivo puede ser plasmado en una planilla de cálculo, mientras que la fórmula requiere de una manipulación algebraica de cierta complejidad.

Presentamos primero una solución experta.

Llamando *An* al capital ahorrado al finalizar el mes *n*, y *r* a la tasa de interés se puede ir calculando mes a mes, en forma recursiva:

$A_1 = 100 \cdot (1 + r)$

$A_1 = (A + 100) \cdot (1 + r)$

$A_n = (A_{n-1} + 100) \cdot (1 + r)$

Y remplazando *Ai* en *Ai+1* resulta:

$A_2 = 100 \cdot (1 + r)^2 + 100 \cdot (1 + r)$

$A_3 = 100 \cdot (1 + r)^3 + 100 \cdot (1 + r)^2 + 100 \cdot (1 + r)$

...

$A_n = 100 \cdot (1 + r)^n + 100 \cdot (1 + r)^{n-1} + ... + 100 \cdot (1 + r)^2 + 100 \cdot (1 + r).$

Se puede llegar a la misma fórmula pensando que en el mes *n* los *$100* que se depositan el primer mes tienen *n* meses de interés, los *$100* del segundo mes tiene *n 1* meses de interés, y así hasta los *$100* del último mes que aportan un mes de intereses.

La pregunta a) se puede responder calculando directamente la suma de doce términos:

$A_{12} = 100 \cdot (1 + r)^{12} + 100 \cdot (1 + r)^{11} + ... + 100 \cdot (1 + r)^2 + 100 \cdot (1 + r) \cong 1264{,}27$

o también a partir de la fórmula

www.elsolucionario.org

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \text{ con } a = 1 + r$$

$$A_n = M \cdot (1 + r) \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \qquad (*)$$

y en particular para $n = 12$, $M = 100$ y $r = 0{,}008$:

$$A_{12} = 100 \cdot 1{,}008 \cdot \frac{1{,}008^{12} - 1}{0{,}008} \cong 1264{,}26$$

Las preguntas b) y c) se pueden contestar usando la fórmula (*). Aunque para calcular el ahorro para *$300* basta con hacer *3 · $1264,27 = $3792,81*.

La gestión en el aula se puede ver limitada por la complejidad algebraica que representa encontrar una fórmula cerrada que vincule a todas las variables. Sin embargo, es posible resolver el problema volcando el modelo recursivo en una planilla de cálculo:

	A	**B**
1	Mes	Ahorro
2		100
3	1	= (1+r) * B2
4	2	= (1+r) * (B3+B2)
5	3	= (1+r) * (B4+B2)
	...	...
14	12	= (1+r) * (B11+B2)

Para responder la pregunta c), se puede ir aproximando el valor del monto inicial *M* probando con diferentes valores en la casilla B2 de la planilla, hasta encontrar un valor para el cual el capital ahorrado después de *60* meses sea de *$10000*. Disponer de la fórmula (*) permitiría calcular directamente *M* en función de *A60*, aunque no se hace imprescindible para resolver el problema.

La pregunta b) permite analizar que, a igual interés y plazo, el capital ahorrado y el monto que se deposita mensualmente son directamente proporcionales.

Si se desea profundizar en el tratamiento de la suma de *n* términos de una progresión geométrica, se puede comenzar promoviendo la búsqueda de la fórmula (*) para valores pequeños de *n*, lo cual limita la complejidad algebraica de las sustituciones recursivas. Concretamente se puede dar como tarea a los alumnos:

Encontrar una fórmula que permita expresar el dinero ahorrado después de 3 meses

en función de un interés r cualquiera y de un monto fijo M depositado mensualmente.

Como ya mencionamos, la fórmula para la suma de los primeros términos de una progresión geométrica con cualquier base a, no necesariamente natural, se puede demostrar adaptando las distintas demostraciones que se hicieron para $a = 2$ y para $a = 11$.

11 Estamos suponiendo alumnos que ya usaron la planilla de cálculo para la producción de gráficos de funciones y la escritura de relaciones sencillas entre variables.

12 Para cualquier número real a $\neq 1$ vale la siguiente igualdad: $1+a+a^2+\ldots+a^k=\sum_{i=0}^{k-1} a^i = \frac{a^k-1}{a-1}$

www.elsolucionario.org

CAPÍTULO IV

Trabajando con ecuaciones

Hay que fomentar el cálculo aproximado. Los problemas que la matemática puede resolver de manera exacta son pocos. En general hay que contentarse con una cierta aproximación y, por tanto, conviene: a) Aprender métodos aproximados para resolver problemas (métodos gráficos, aproximaciones sucesivas); b) Romper con la tradición muy extendida, sobre todo a nivel secundario, de que hay que aplicar fórmulas bien determinadas para obtener el resultado de cualquier problema; incluso para ecuaciones de segundo grado conviene dar métodos aproximados de solución (...); c) Introducir al cálculo de errores para saber en todo momento los límites en que están comprendidos los resultados aproximados obtenidos.

Luis A. sAntALó (1966: 15).

Aunque no se conoce una ley explícita que determine las cifras sucesivas [de un número irracional], pueden determinarse tantas como se quiera.

JuLio Rey PAstoR (1963: 98).

¿Qué es una ecuación? Para muchos es sinónimo de "despejar" la incógnita. Sin embargo, trabajar solamente con esta técnica de resolución no aborda la esencia del concepto de ecuación como condición sobre una o más variables. El concepto de ecuación no vive aislado, sino imbricado en una red de conceptos como el de raíz, conjunto solución, variable, dominio de variación, ecuaciones equivalentes, soluciones

aproximadas.

Si los alumnos piensan que la ecuación es una igualdad numérica, pueden considerar –con derecho– que una ecuación sin solución no es una ecuación, porque no hay ningún número que cumpla con la igualdad. La incógnita como condición sobre una *variable*, y no como *número* desconocido a develar, abre el camino a la búsqueda de soluciones o valores posibles –exactos o aproximados–. Con esta mirada, una ecuación se puede interpretar como una restricción sobre un dominio de variación, cobrando sentido las ecuaciones que tienen más de una o ninguna solución, y dando lugar a distintos métodos de resolución, exactos o aproximados[13].

En este capítulo trabajaremos con ecuaciones de distintas características: con solución, sin solución, con más de una solución, derivadas de un contexto intramatemático o como resultado de la modelización de una situación extramatemática, con ecuaciones que se pueden resolver analíticamente y otras para las que no hay fórmula. Sí. No hay fórmulas para todo.

Incluimos métodos exactos y aproximados de resolución analítica, numérica, gráfica y geométrica de las ecuaciones, y estudiamos la existencia de soluciones por diferentes caminos: el método de Gauss, el teorema de Bolzano, la representación gráfica, calculando los ceros con un *software* graficador y por el contexto que da origen a la ecuación, en nuestro caso una boya que flota.

Primera ecuación

Encontrar un número real x que cumpla que.

Es de esperar que los alumnos operen algebraicamente con mayor o menor destreza para “despejar la x”. Un tratamiento algebraico posible para esta ecuación es hacer una sustitución de variables llamando $y = x$, y transformar la ecuación dada en $y2 + y = 5$, que se puede resolver con la fórmula de la ecuación cuadrática. Las soluciones son

$$y = (-1 \pm \sqrt{21}) / 2$$

Puede ser necesaria una intervención docente para hacer notar que y tiene que ser positivo y entonces la única solución posible es:

$$x = y^2 = (-1 + \sqrt{21})^2 / 4 \cong 3{,}20871215\ldots$$

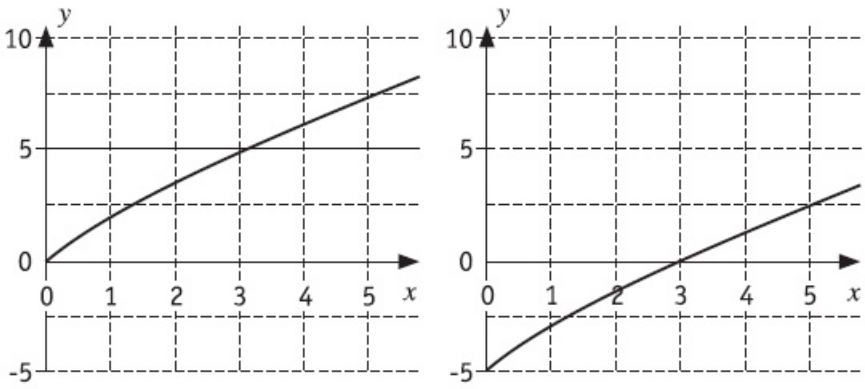
Otra posibilidad es “dejar sola” la : $5 - x =$ y elevar ambos miembros al cuadrado. Así se obtiene la ecuación cuadrática $x2 - 11x + 25 = 0$, que agrega una solución espuria $(x = 7{,}791287\ldots)$. Como es positiva, no genera sospechas, pero no cumple la condición original y debe ser descartada. ¿Por qué no sirve? La operación de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación modifica el conjunto solución. Despejar no alcanza.

Dependerá de los conocimientos algebraicos de los alumnos y de su familiaridad con los ejes cartesianos el que recurran o no a hacer un gráfico para representar la ecuación.

www.elsolucionario.org

Pues $x + x = 5$ se puede interpretar como la intersección de las gráficas de las curvas $y = x + x$ e $y = 5$, o como los ceros de la función $f(x) = x + x - 5$, o también como la preimagen del conjunto unitario $\{5\}$ para la función $g(x) = x + x$.

Realizar una gráfica permite anticipar la existencia de una solución y determinar un intervalo donde ésta se halla.



En el gráfico de la izquierda, la solución de la ecuación corresponde al punto de intersección de las curvas $y = x + \sqrt{x}$ y de $y=5$. En el gráfico de la derecha, el cero de la función $f(x) = x + \sqrt{x} - 5$ está representado por la intersección de la gráfica de f con el eje x. Ambos gráficos permiten establecer que la solución buscada está entre 3 y 4.

El "método gráfico" es más anticipatorio y global que el "método algebraico". Legalizar la resolución gráfica en la escuela abre posibilidades que no existen cuando sólo se trabaja con el álgebra.

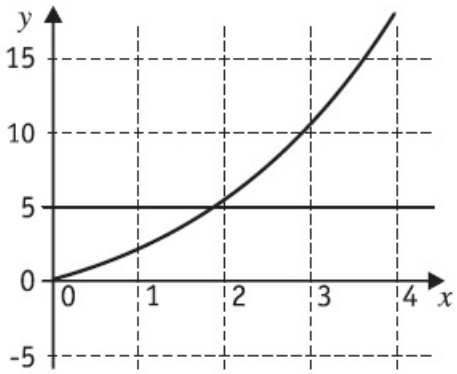
Segunda ecuación

Encontrar un número real x que cumpla que $x^2 + \sqrt{x} = 5$.

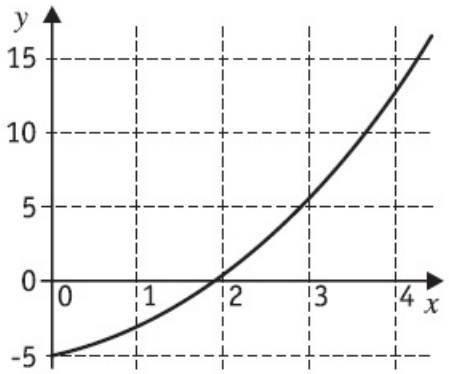
Si se intentan los métodos algebraicos usados para la ecuación anterior, no se arriba a ningún puerto: ¡los alumnos no disponen de una fórmula que les permita calcular las soluciones de $y^4 + y = 5$ o de $x^4 - 10\,x^2\,x + 25 = 0$!

El criterio de Gauss asegura que no hay raíces racionales para ninguno de estos dos polinomios de coeficientes enteros. Además, la no viabilidad de la resolución algebraica lleva a preguntarse sobre la existencia de una solución y cómo encontrarla, si es que la hay.

La representación gráfica cobra ahora otro estatus: puede funcionar como una herramienta que permite confirmar la existencia de solución, además de acotar el espacio de búsqueda. Como antes, es posible interpretar la ecuación como intersección de las curvas $y = x^2 + x$ e $y = 5$, o como ceros de la función $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 5$. Ambos gráficos "muestran" que hay una solución en el intervalo $[1;2]$.



Representación gráfica de las curvas $y = x^2 + \sqrt{x}$ e $y = 5$



Gráfica de $f(x) = x^2 + x - 5$

La continuidad de *f(x)* se "ve" a través de una curva de trazo continuo, sin "agujeros", que necesariamente debe cortar al eje *x* entre *1* y *2* pues *f(1) < 0 y f(2) > 0*.

Además, como *f* es una función creciente, esa solución será la única.

En rigor, la existencia de solución está garantizada por el teorema de Bolzano[14], que a su vez se apoya en la completitud de los números reales.

Citamos dos párrafos de un artículo de Bergé y Sessa[15] que iluminan la complejidad del concepto de continuidad de la recta numérica y su relación con la completitud del conjunto de los números reales:

[…] quienes enseñan un primer curso de Cálculo seguramente observan, a la hora de enseñar el Teorema de Bolzano, reacciones de perplejidad de los alumnos: "¿Para qué hace falta hacer un teorema para demostrar algo que es evidente?". Al tratamiento y a la comprensión de este teorema subyacen, entre otros elementos, las nociones de función continua, de recta geométrica y su continuidad, de conjunto de los números reales y su completitud, y de la correspondencia entre puntos y números. Sin embargo, generalmente esas nociones no se ponen en juego y el teorema pierde su riqueza debido al hecho de que es visualizado geométricamente y la continuidad de la recta es, para los alumnos a esa altura, un hecho natural, ya dado, que se presenta como evidente.

[…]

En los desarrollos tempranos del cálculo, el hecho de trabajar con problemas de la realidad no permitió problematizar la naturaleza de los números que se obtenían como solución. La pregunta sobre la completitud del dominio numérico está ligada a la existencia de solución en el modelo matemático, y no en el problema que se modeliza. Abordar el problema de la completitud en la enseñanza hace necesario pensar en un escenario descontextualizado. Por otro lado, la noción de número real no se atrapa a partir de problemas que involucren instrumentos de medición o la lectura de datos que provengan de fenómenos físicos. Para estas situaciones los números racionales son suficientes. No es posible mostrar la inconmensurabilidad de dos magnitudes o la

www.elsolucionario.org

irracionalidad de la medida de una magnitud a partir datos provenientes de instrumentos de medición.

Cálculo aproximado de la solución

Aceptada la existencia de una solución entre *1* y *2*, ya sea a través del análisis de las gráficas, o porque 12 + 1 < 5 y 2 2 + 2 > 5, el problema de encontrarla se transforma en una búsqueda de precisión. Solicitar una aproximación de un milésimo obligará a los alumnos a pensar en algún tipo de resolución numérica.

Elegimos especialmente una ecuación con solución irracional para "amasar" mejor la idea de que "cualquier solución que se encuentre será una solución aproximada".

Una forma de explorar con la calculadora podría ser buscar los valores de $y = x\,2 + x$ para $x = 1{,}1;\ 1{,}2;\ldots;\ 1{,}9$;

y así encontrar que para *1,9* da menor que *5* y "afinar" la búsqueda probando con $x = 1{,}91;\ldots;\ 1{,}99$; y continuar así, agregando cada vez más lugares decimales:

1º		**2º**		**3º**	
x	$x\,2 + x$	x	$x\,2 + x$	x	$x\,2 + x$
1,0	*2,0000*	*1,90*	*4,9884*	*1,900*	*4,9884*
1,1	*2,2588*	*1,91*	*5,0301*	*1,901*	*4,9925*
1,2	*2,5354*	*1,92*	*5,0720*	*1,902*	*4,9967*
1,3	*2,8301*	*1,93*	*5,1141*	*1,903*	*5,0009*
1,4	*3,1432*	*1,94*	*5,1564*	*1,904*	*5,0051*
1,5	*3,4747*	*1,95*	*5,1989*	*1,905*	*5,0092*
1,6	*3,8249*	*1,96*	*5,2416*	*1,906*	*5,0134*
1,7	*4,1938*	*1,97*	*5,2844*	*1,907*	*5,0176*
1,8	*4,5816*	*1,98*	*5,3275*	*1,908*	*5,0218*
1,9	*4,9884*	*1,99*	*5,3707*	*1,909*	*5,0259*
2,0	*5,4142*	*2,00*	*5,4142*	*1,910*	*5,0301*

Se obtienen sucesivamente los intervalos "encajados":

$[1{,}9;\ 2] \supseteq [1{,}90;\ 1{,}91] \supseteq [1{,}902;\ 1{,}903] \supseteq \ldots$

La solución está en todos estos intervalos. El tercero da la solución $x = 1{,}902$ que tiene la precisión pedida de un milésimo porque tiene tres cifras decimales exactas[16].

También se puede ir dividiendo cada intervalo por la mitad, en lugar de en diez intervalos cada vez. Primero se busca el punto medio del intervalo *[1;2]*. Para *1,5* da menor que *5* y para *2* da mayor que *5*. Por eso se considera el intervalo *[1,5;2]*. Luego se busca el punto medio para el nuevo intervalo. Para *1,75* da menor que *5*. Por eso ahora se considera el intervalo *[1,75; 2]*. Se sigue así hasta que la distancia entre los extremos

de algún intervalo sea menor que un milésimo:

1º		**2º**		**3º**	
x	$x\,2 + x$	x	$x\,2 + x$	x	$x\,2 + x$
1	*2,0000*	*1,5*	*3,4747*	*1,9023*	*4,9980*
1,5	*3,4747*	*1,75*	*4,3853*	*1,9027*	*4,9997*
2	*5,4142*	*2*	*5,4142*	*1,9031*	*5,0013*

Nuevamente se obtienen intervalos "encajados" que contienen la solución:
[1,5; 2] ⊇ [1,75; 2] ⊇ [1,875; 2] ⊇ ... ⊇ [1,9023; 1,9031] ⊇ ... porque en el extremo izquierdo da menor que *5* y en el derecho mayor que *5*. Recién en el paso *11* la longitud del intervalo *1,9031 1,9023 = 0,0008* es menor que el error requerido de un milésimo. Cualquier número de este intervalo será una solución aproximada con el error requeri do. Es imposible hallar la solución exacta porque no es un número racional y en algún momento hay que detener el proceso iterativo.

¿Por qué consideramos esta segunda variante, dividiendo cada intervalo en mitades, en lugar de dividirlo en diez partes? ¡Pareciera que hacen falta más pasos para encontrar la solución! Es cierto. Pero cada paso es más corto: exige un solo cálculo nuevo de la fórmula y una sola decisión. En lenguaje binario –como "piensan" las computadoras– una rápida cuestión de sí o no. Este algoritmo para la búsqueda de soluciones de una ecuación tiene nombre: método de bisección.

Puede ocurrir que muchos alumnos prueben "al tanteo" sin ninguna organización de la búsqueda, o quizás no sean conscientes de los criterios que están usando para elegir el próximo candidato a solución. Las dos formas de exploración que propusimos, una más cercana a nuestro pensamiento decimal, y la otra, su "hermana" binaria, son sistematizaciones de estas búsquedas más anárquicas. Una revisión colectiva de los distintos procedimientos permitirá analizar que se basan en una sucesión de intervalos "encajados" $[a_n, b_n]$ $n = 1,2,3, \ldots$, que contienen –todos– la lución.

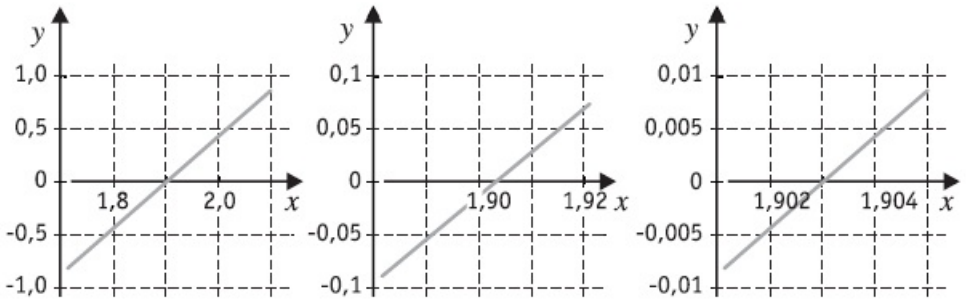
¿Qué nos asegura que este proceso iterativo produzca una solución de la ecuación? ¿Con qué criterio se termina este proceso iterativo? Cuando la longitud *bn an* del intervalo $[a_n,b_n]$ es menor que el error solicitado, cualquier número de ese intervalo tendrá la aproximación requerida. En el algoritmo "decimal" $b_n+1 - an+1 = 1/10\ (b_n - a_n)$, y en el "binario", $b_n+1 - a_{n+1} = 1/2\ (b_n - a_n)$. En ambos casos, las longitudes de los intervalos tienden a cero, y es posible acercarse a la solución de la ecuación tanto como se quiera.

La completitud de los números reales garantiza la existencia de esa solución, asegurando que el número hallado es efectivamente una aproximación de la solución exacta y no un número cualquiera. Al remplazar en la ecuación cualquiera de los valores obtenidos no dará nunca exactamente *5*.

Uso de la computadora

www.elsolucionario.org

Habilitar en el aula el uso de un *software* que grafique funciones, como por ejemplo Graphmatica, abre la posibilidad de mejorar la aproximación de la solución cambiando las escalas, sin hacer ninguna cuenta. Los alumnos podrían producir una serie de gráficos como la siguiente:



Si bien resolver el problema de esta manera delega parte del trabajo en la herramienta gráfica, los *zooms* sucesivos también representan una búsqueda de la solución a través de un "encaje" de intervalos.

Habilitar el uso de algún graficador también tiene su riesgo, ya que un valor aproximado de la solución se puede obtener directamente con la opción que calcula los ceros de una función. Sin embargo, el uso a ciegas de esta opción puede dar la idea de que se está encontrando una solución exacta y desdibujar los límites en que están comprendidos los resultados aproximados obtenidos. El trabajo numérico que proponemos permite poner de manifiesto que la solución que se encuentra no necesariamente es exacta.

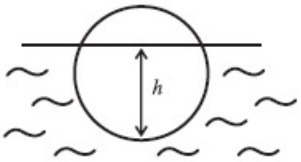
Una ecuación de la física

La primera ecuación que tratamos en el capítulo se puede resolver analíticamente y no genera cuestionamiento en cuanto a la existencia de solución. La segunda ecuación sólo se puede resolver numéricamente en forma aproximada y por eso tuvimos que analizar la existencia de solución de otra manera, apoyándonos en una gráfica y en el teorema de Bolzano. La nueva ecuación resultará de modelizar una situación física que involucra el principio de Arquímedes y donde la existencia de una solución queda garantizada por el contexto.

Problema de la boya

Una esfera maciza de 10 cm de radio y hecha de un material cuya densidad es ρ = *0,75 g/cm3 se hunde en el agua.*

¿Cuánto estará sumergida cuando logre el equilibrio?



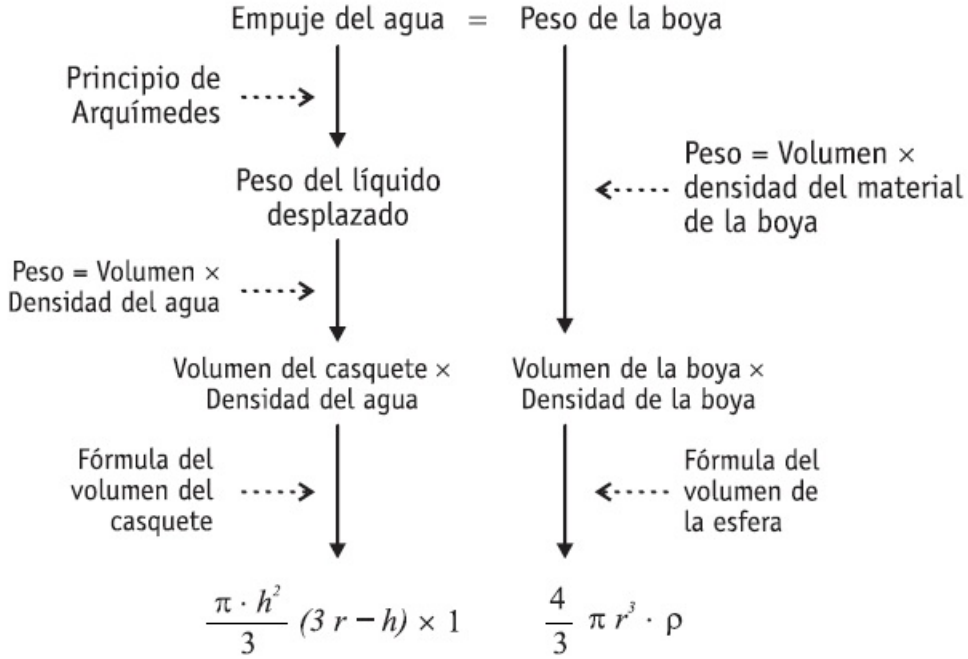
El volumen de una esfera de radio r es igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$ *y el de un casquete de altura h de una esfera de radio r es* $\frac{\pi \cdot h^2}{3}(3r - h)$.

Elegimos que las fórmulas para calcular el volumen de la esfera y del casquete esférico sean datos del problema, porque el asunto matemático que nos interesa es otro. Además, pensamos que también forma parte de la resolución de un problema detectar qué informaciones faltan y salir a buscarlas. Para la situación de la boya en particular, el docente puede decidir si da las fórmulas como datos del problema, si las proporciona recién cuando los alumnos las requieran o si los invita a buscar en libros, Internet u otras fuentes.

En cambio, nos parece necesario que los alumnos ya hayan trabajado el principio de Arquímedes en la clase de física para que la comprensión del fenómeno físico no interfiera en la construcción de un modelo matemático de la situación, y porque es la "materia prima" que le da sentido al problema.

Modelización de la situación

El principio de Arquímedes afirma que "*todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del líquido desalojado*".


Empuje del agua = Peso de la boya
Principio de Arquímedes
Peso del líquido desplazado
Peso = Volumen × densidad del material de la boya
Peso = Volumen × Densidad del agua
Volumen del casquete × Densidad del agua
Volumen de la boya × Densidad de la boya
Fórmula del volumen del casquete
Fórmula del volumen de la esfera
$\frac{\pi \cdot h^2}{3}(3r - h) \times 1$
$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho$

Por lo tanto, un cuerpo flota cuando el empuje del agua es igual al peso del cuerpo. En

www.elsolucionario.org

particular, cualquier objeto de densidad menor que la del agua flota.

En el diagrama de la página anterior representamos los pasos de una modelización y los conocimientos involucrados en cada uno de ellos:

La ecuación $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = \frac{\pi \cdot h^2}{3}(3r - h)$ es un modelo de la situación.

Para encontrar la altura del casquete que queda sumergido en el agua hay que resolver la siguiente ecuación:

$$h^3 - 30h^2 + 3000 = 0.$$

La existencia y la unicidad de solución quedan garantizadas por el contexto. Pero un polinomio de grado tres puede tener hasta tres raíces y en este caso, al calcular los ceros con un graficador informático u otro método, se obtienen tres valores para *h*: *-8,7939; 13,473; 25,3209*. Confrontados con tres soluciones, nos damos cuenta de que el modelo matemático estaba incompleto: no puede haber una altura *h* del casquete que sea negativa ni mayor que dos radios. Se lo puede completar agregando una condición más sobre *h*: $0 \leq h \leq 2r$. Restringir el dominio no es una

imposición externa y le da sentido a las restricciones fuera de contexto. Si por algún método numérico o gráfico se encontraran sólo los ceros del polinomio que están fuera del dominio, el contexto alimentará la necesidad de seguir buscando otra solución.

Una cuestión de proporcionalidad

Si en lugar de tener *10 cm* de radio, la boya tuviera *1* metro de radio, ¿cuánto estaría sumergida? Pareciera que si el radio es diez veces más grande, lo que se hunde, también. Y en efecto es así. Esto debiera reflejarse en la fórmula que modeliza la situación. ¿Dónde se esconde en la fórmula esta relación de proporcionalidad entre el radio y la altura del casquete sumergido?

Las ecuaciones no siempre tienen solución

Cuando no se encuentra solución a una ecuación dada,¿será que no la encontramos o que no hay? Estudiemos las siguientes dos ecuaciones, que son muy parecidas:

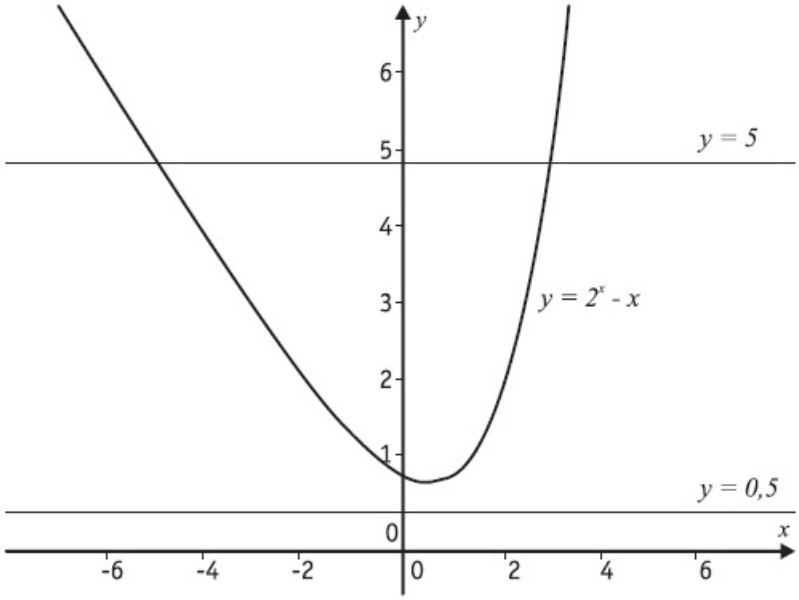
a) $2^x - x = 5$

b) $2^x - x = 0{,}5$

En ninguna de las dos ecuaciones se puede “despejar” la incógnita. La ecuación a) tiene una solución entera fácil de encontrar. ¿Cómo saber si es la única? Cualquier aproximación numérica con la que probemos en a) o b), al ser reemplazada en la ecuación no satisfará exactamente la igualdad. ¿Es entonces una solución de la ecuación?

¿La ecuación tiene realmente solución? ¿Cómo decidir si el error que se obtiene proviene de usar valores aproximados o de que no hay solución? Tampoco hay un contexto de referencia –como en el problema de la boya– que dé información sobre la existencia de soluciones.

Las gráficas salen nuevamente al cruce ofreciendo un panorama cualitativo global que permite decidir la cantidad de soluciones y encontrar valores aproximados para encarar una búsqueda numérica:



Algoritmos geométricos

Consideremos la ecuación $x^2 = 5$, cuya solución exacta es $\sqrt{5}$. ¿Qué es conocer $\sqrt{5}$? ¿Saber sus cifras decimales?

¿Saber que es un número que elevado al cuadrado da 5? Es todo esto, y también la longitud del lado de un cuadrado de área 5.

Pensar la ecuación $x^2 = 5$ en términos geométricos

puede enriquecer la forma algebraica de pensar a través de un juego de "traducciones" mutuas entre el marco geométrico y el algebraico[17]. Veamos el siguiente problema:

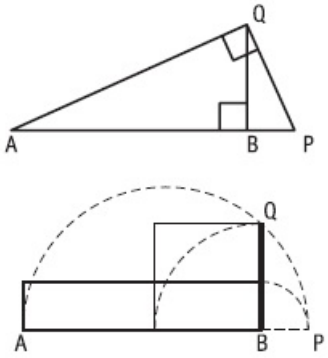
Construir un cuadrado de área 5 dado un segmento de longitud 1

La relación $AQ/BQ = BQ/BP$ en un triángulo rectángulo APQ, donde BQ es la altura de la hipotenusa, permite construir un segmento de longitud 5 .

Si $AB = \sqrt{5}$ y $BP = 1$, el segmento BQ mide 5 y el área del cuadrado de lado BQ es 5.

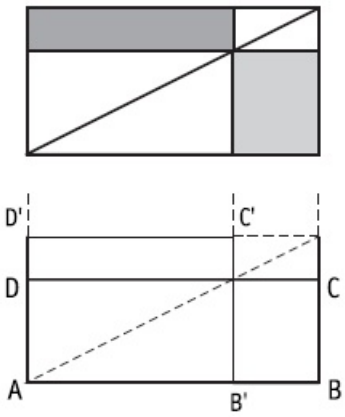
(Todos los arcos punteados son arcos de circunferencia.)

www.elsolucionario.org



Esta construcción se puede asociar con la resolución algebraica que consiste en reconocer directamente que $x = \sqrt{5}$

Otra forma de encontrar un cuadrado de área *5* es partir de un rectángulo inicial de base *5* y altura *1* e ir transformándolo en rectángulos cada vez "más cuadrados". Este proceso es un algoritmo geométrico que puede equipararse en complejidad a los algoritmos numéricos que tratamos en la primera parte del capítulo: es iterativo y produce aproximaciones sucesivas de la solución cada vez mejores. ¡Y fue desarrollado por Herón de Alejandría, un matemático griego del siglo I d.C.!



Para construir un nuevo rectángulo de la misma área que un rectángulo ya dado, se puede usar la siguiente propiedad: "las áreas de los dos rectángulos que quedan determinados en torno a la diagonal de un rectángulo dado son iguales"[18].

La figura muestra las líneas auxiliares de una posible construcción del nuevo rectángulo *AB'C'D'* a partir del rectángulo dado *ABCD*.

Se pueden ir eligiendo las bases de los nuevos rectángulos "al tanteo" o, del mismo modo que en los algoritmos numéricos, mejorar el tanteo, sistematizar la elección de cada nueva base tomando un segmento igual al promedio de los dos lados del rectángulo anterior.

Se produce así una sucesión de rectángulos de área *5* cuyas bases se achican y cuyas alturas se agrandan. Si llamamos *bn* a la base del *n*-ésimo rectángulo y *hn* a su altura (de forma que $b_n \cdot h_n = 5$), podemos escribir,

$$b_n+1 = \frac{1}{2} \cdot (b_n + h_n)$$

y la sucesión b_n es la misma que produce el método de Newton-Raphson para la ecuación $x^2 - 5 = 0$[19].

Algunas reflexiones finales

Aquí queremos explicitar algunas cuestiones matemáticas que atraviesan este capítulo y que constituyen un telón de fondo para el trabajo con ecuaciones que proponemos. Al mismo tiempo, consideramos que transmitir estas ideas en el aula contribuye a mostrar a la matemática como un producto cultural vivo, en construcción.

Históricamente, aceptar que no siempre se pueden encontrar analíticamente las soluciones de una ecuación llevó varios siglos de búsquedas exitosas e infructuosas que hicieron crecer la sospecha de que no siempre se podría. Recién a principios del siglo XIX se demostró que no hay una fórmula general para hallar ceros de polinomios de grado mayor o igual que cinco[20].

Nos parece central hacer un trabajo en el aula que ponga de manifiesto que no todo se puede hacer con fórmulas. El primer paso de este trabajo es diferenciar la existencia de una fórmula para encontrar soluciones de la existencia misma de las soluciones. A su vez, compartimos con Santaló que se debe fomentar el cálculo aproximado porque: "Los problemas que la matemática puede resolver de manera exacta son pocos. En general hay que contentarse con una cierta aproximación". Actualmente las calculadoras tienen una aproximación tan grande que los resultados son exactos para las necesidades prácticas. ¿Qué es entonces hacer cálculos aproximados? ¿Cuándo una solución es exacta? Estas cuestiones nos adentran en el terreno netamente matemático de la completitud de los números reales, que intentamos problematizar mostrando algunos límites de los números racionales. Al mismo tiempo, las computadoras permitieron un desarrollo tal del cálculo numérico que se ha vuelto impensable ignorarlo en la escuela.

13 Panizza, Sadovsky y Sessa (1996); Sessa (2005: Cap. 2).

14 Si f es una función continua en el intervalo [a,b] y f(a) · f(b) < 0, entonces, existe un número c en (a; b) tal que f(c) = 0.

15 Bergé y Sessa (2004).

16 La recíproca no es cierta. Por ejemplo, si la solución fuera igual a *1,902*, el número *1,9018* sería una aproximación con un error menor que un milésimo y no tiene tres cifras decimales exactas.

17 Douady (1986). Otros ejemplos de este interjuego son la interpretación de la propiedad distributiva como la suma de áreas de rectángulos, el binomio de un cuadrado como suma de las áreas de cuadrados y rectángulos, el teorema de Pitágoras como una equivalencia de áreas de cuadrados. En Sessa (2005).

18 Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2007: problemas 8 y 10, Cap. III).

19 Berté (2005: 151).

www.elsolucionario.org

20 “No fue sino a principios del siglo XIX que el italiano Ruffini y el genio noruego Abel concibieron la revolucionaria idea de demostrar *la imposibilidad de la solución de la ecuación algebraica general de grado n por medio de radicales*. Se debe entender claramente que la cuestión no consiste en demostrar que cualquier ecuación algebraica de grado *n tiene* soluciones, lo cual fue demostrado por Gauss en su tesis doctoral en 1799. Así que no hay duda acerca de la existencia de las raíces, debido especialmente a que éstas pueden hallarse hasta cualquier grado de aproximación mediante procedimientos adecuados [...] Pero el problema de Abel y Ruffini era muy distinto: ¿puede encontrarse la solución *por medio únicamente de operaciones racionales y de radicales*?”. En Courant y Robbins (2006).

CAPÍTULO V

Modelización intramatemática
Problemas con áreas

La propuesta de este capítulo no está concebida como una secuencia de problemas para el aula, sino que fue escrita pensando más bien en la formación del profesor. No obstante, muchos de los problemas pueden trabajarse con los alumnos eligiendo convenientemente qué sacar o poner.

A diferencia de los capítulos anteriores, no presentamos situaciones extramatemáticas. Comenzamos modelizando situaciones geométricas en las que jugamos con la interacción entre distintas representaciones, yendo de la geometría al álgebra, del álgebra a lo funcional. En los dos primeros problemas proponemos maximizar el área de rectángulos inscriptos en triángulos rectángulos y en un cuarto de circunferencia. En particular, presentamos una posible entrada a función cuadrática a partir de una reformulación del enunciado del primer problema.

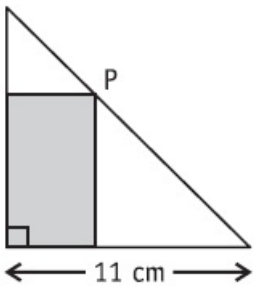
En una segunda parte, presentamos una familia de problemas que resultan de pensar a los triángulos rectángulos y a la circunferencia como gráficas de funciones. Esta reinterpretación de los objetos geométricos en términos funcionales fue la que nos llevó a una generalización del problema de optimización: encontrar un rectángulo de área máxima o mínima bajo una curva cualquiera.

Veremos cómo distintos enunciados, juegos de datos y formas de representación influyen –o pueden influir– en la actividad matemática que se despliega.

Primer problema[21]

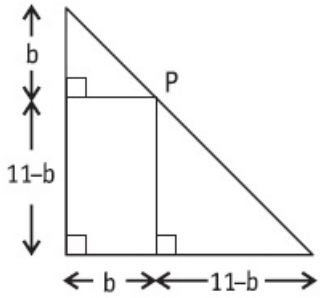
www.elsolucionario.org

Un punto P se mueve sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 11cm. De todos los rectángulos que se pueden dibujar, ¿cuál es el de mayor área?



Una forma de empezar es calculando las áreas de varios rectángulos. Para ello, se puede intentar medir los lados sobre la figura, lo que se puede ver dificultado porque el dibujo no está a escala.

El hecho de que todos los rectángulos tienen igual perímetro no está dado explícitamente en el enunciado y se podrá conjeturar a partir de las mediciones sobre un dibujo en tamaño natural, o también deducir de las relaciones en la figura dada, usando que todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes:



Pensando en el aula, una vez que los alumnos reconocen que todos los rectángulos tienen igual perímetro se les puede ofrecer una forma concreta de representación de la situación mediante un hilo de *22 cm*, haciendo variar continuamente los lados del rectángulo. Esto permite advertir la variación del área, especialmente al acercarse a las longitudes "límite" $b = 0$ y $h = 11$ ó $b = 11$ y $h = 0$, reforzando el sentido de la búsqueda de un rectángulo de área máxima.

Un enunciado diferente del problema, como por ejemplo: "*Encontrar el rectángulo de mayor área entre todos los rectángulos de perímetro 22"* habría habilitado de entrada el uso del hilo como recurso para visualizar las áreas. Sin embargo, en este caso, el que todos los rectángulos tengan igual perímetro es un dato del problema y no un asunto a investigar.

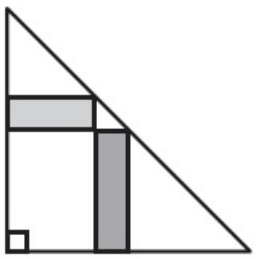
Una tabla con los valores obtenidos para las bases y alturas de los rectángulos –ya sea midiendo o teniendo en cuenta la relación $b + h = 11$– junto con las áreas correspondientes, podría ser:

b	$h = 11\ b$	$Área = b\ .\ h$
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	2	18
10	1	10

Elegir solamente valores naturales para las bases puede llevar a pensar que hay dos posibilidades para el área máxima: $b = 5$ y $b = 6$. Pero ¿cuánto vale el área si la base mide *5,2*? Investigando entre *5* y *6* se puede llegar a conjeturar que el área es máxima para el cuadrado de lado *5,5*. Un programa de geometría dinámica[22] que permita variar el punto *P* y calcular el área puede colaborar en la elaboración de esta conjetura.

Es la elección del número *11* la que lleva a considerar valores no naturales de la base. Si se hubiera elegido *12* en lugar de *11*, el área máxima se obtendría para una base de *6 cm*, que figuraría en una tabla con valores naturales, y las posibilidades de reflexión y discusión acerca de la variación de las áreas de los rectángulos se verían limitadas.

En un contexto puramente geométrico, para validar que el área máxima se realiza para el cuadrado de *5,5cm* de lado se puede comparar el área de cualquiera de los rectángulos con el área del cuadrado:



La base del rectángulo rayado es igual a la altura del rectángulo punteado, y su altura es igual al lado del cuadrado, que es mayor que la base del rectángulo punteado. De modo que el rectángulo punteado es más chico y su área es menor que la del rectángulo rayado. Vale decir que cualquiera de los rectángulos “inscriptos” en el triángulo tendrá un área menor que la del cuadrado. Esta explicación no depende de que los lados iguales del triángulo isósceles midan *11 cm*, sino que es válida para cualquier triángulo rectángulo isósceles.

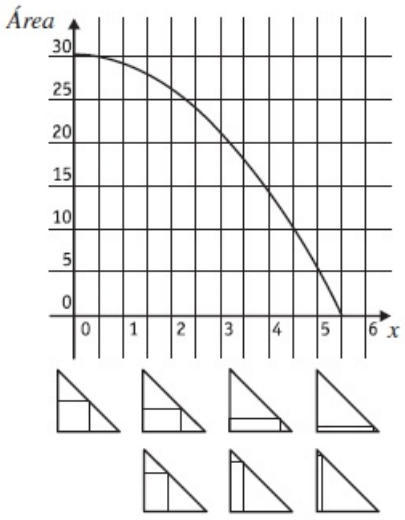
Podemos “traducir” la idea geométrica anterior al lenguaje algebraico llamando x a la

www.elsolucionario.org

base del rectángulo rayado –que es la diferencia entre el lado del cuadrado y un lado del rectángulo–. Así podemos expresar su área como $5{,}5 \cdot x$, y el área del rectángulo punteado será igual a $(5{,}5 - x) \cdot x = 5{,}5 \cdot x - x^2$. La comparación de las dos expresiones algebraicas también ofrece una conclusión inmediata. Además, como $x2$ es una función creciente de x, el área de los rectángulos disminuye cuando x aumenta. Por este camino se puede modelizar la situación expresando el área de cualquiera de los rectángulos en función de su "desviación" respecto del cuadrado:

$$Área(x) = (5{,}5 + x) \cdot (5{,}5 - x) = 5{,}5^2 - x^2,$$

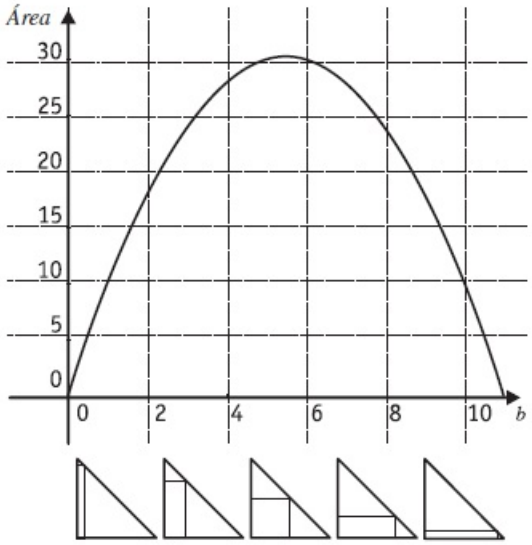
de donde también resulta que cualquiera sea el valor de x el área del rectángulo será menor que la del cuadrado. La gráfica de esta función es una parábola cuyo máximo se alcanza en $x = 0$ y da otro acceso a la información:



También se puede encarar el problema escribiendo una fórmula para calcular el área de los rectángulos en función

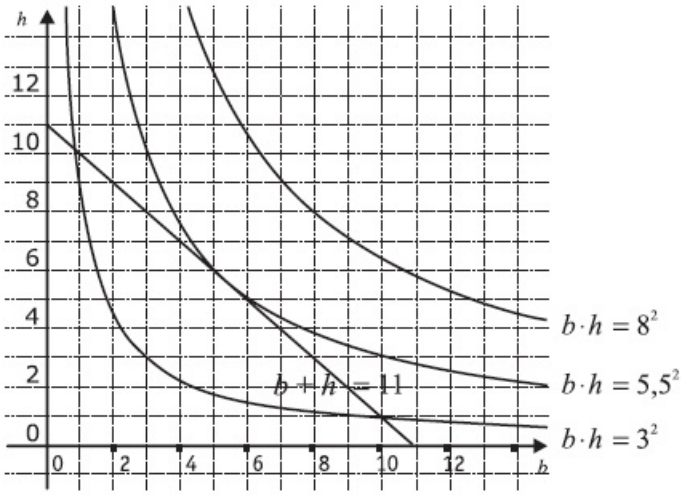
$$Área\ (b) = b \cdot h = b \cdot (11 - b),$$

y maximizar esta función. Si bien esta manera de proceder es matemáticamente correcta, como la anterior, ninguna de las dos garantiza que se esté comprendiendo el comportamiento del área. Una representación gráfica de la función *Área(b)*, en interacción con la situación original, puede aportar en esta dirección:



A diferencia de la tabla de valores, las gráficas permiten visualizar globalmente la variación del área de los rectángulos, ya sea en función de la longitud x o de la base b. Esta última gráfica refleja la simetría de la situación respecto de $b = 5{,}5$ y permite retomar esta cuestión.

Otro modelo de la situación de los rectángulos inscriptos en el triángulo, que también refleja la simetría, es pensarlo como la maximización de la función $A = b \cdot h$ sujeta a la condición $b + h = 11$. Según el valor de A, las hipérbolas $A = b \cdot h$ pueden cortar a la recta $b + h = 11$ en uno, dos o ningún punto. Buscamos una hipérbola tangente a la recta y no una que la corte en dos puntos, porque si una hipérbola tiene dos puntos en común con la recta, habrá otra hipérbola con un valor mayor de A que también la corte en dos puntos. Entonces la solución positiva de este modelo se puede interpretar como el punto de contacto de una hipérbola tangente a la recta $b + h = 11$:



En general, una hipérbola de ecuación $b \cdot h = A$ tendrá uno, dos o ningún punto común con la recta $b + h = P$, según los valores de A y P. Pensando en soluciones

www.elsolucionario.org

positivas,

el problema de encontrar estos puntos de intersección es análogo al de encontrar rectángulos de perímetro P y área A. Aun para valores naturales de A y P, las soluciones pueden ser números irracionales[23]. Nótese también que encontrar

soluciones del sistema $b + h = P;\ b \cdot h = A$ es equivalente a encontrar los ceros de la parábola $b^2 - P \cdot b + A = 0$.

En cualquiera de las versiones presentadas para este problema se están separando las nociones de perímetro y área. Sin embargo, no es inmediato que entre todos los rectángulos de perímetro fijo debiera haber alguno de área máxima. En principio, podría haber alguno de área mínima. Del mismo modo, si se planteara el problema de optimizar el perímetro de todos los rectángulos de la misma área, habría que repensar si se encontrará uno de perímetro máximo o mínimo.

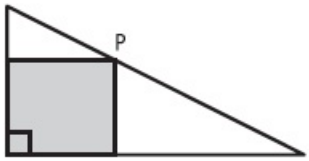
Se puede enunciar el "mismo" problema ubicando el triángulo rectángulo en un sistema de ejes coordenados, por ejemplo:

Decidir cuál de los rectángulos con vértices (0,0), (0,x), (y,0) , (x,y) tiene mayor área, donde (x,y) es un punto de la recta $y = 11 - x$ con x e y positivos.

Este enunciado invita a hacer el gráfico de la recta y privilegia las fórmulas para el cálculo del área, pero no da lugar a un análisis geométrico de la situación ni a detectar que se trata de rectángulos que tienen el mismo perímetro.

Una variante del primer problema

Puede ser interesante analizar el comportamiento de las áreas de los rectángulos inscriptos en un triángulo rectángulo que no sea isósceles, por ejemplo, cuando el cateto mayor mide *8 cm* y el menor *4cm*:



Aquí los rectángulos no tienen todos el mismo perímetro porque cualquier incremento de la base será igual al doble de lo que disminuye la altura. (De hecho, todos los perímetros son distintos y toman todos los valores entre *8cm* y *16cm*) ¿Hay un rectángulo de área máxima? ¿Sigue siendo el cuadrado? ¿Se pueden adaptar los diferentes modelos y procedimientos que presentamos para el problema original?

Una entrada a función cuadrática

Veremos cómo una reformulación del problema 1 permite gestionar en el aula una posible entrada a la función cuadrática como modelo de un fenómeno de crecimiento no

lineal. Estamos pensando en alumnos que han tenido algún trabajo previo con interpretación de gráficos de funciones y con la función lineal como modelo de variación uniforme. Estudiar fenómenos de crecimiento no uniforme resignifica el concepto de variación uniforme en la medida en que muestra otros comportamientos posibles.

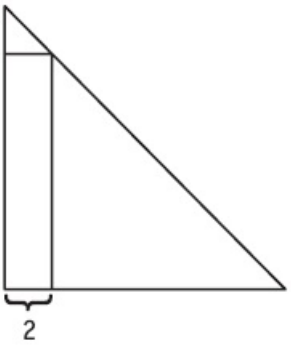
Se tiene un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 11cm. Considerar los rectángulos que se pueden dibujar dentro del triángulo.

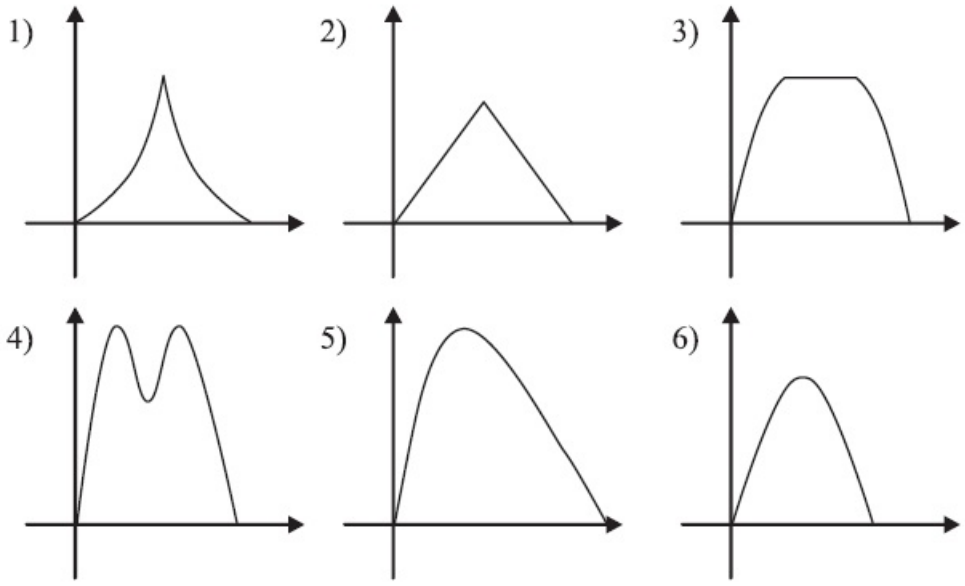
a) ¿Cuál es el área del rectángulo de base 2?

b) ¿Hay algún rectángulo que tenga área mayor? ¿Hay alguno que tenga área menor?

c) ¿Y hay algún otro rectángulo que tenga la misma área que el rectángulo de base 2?

d) Decidir cuáles de los siguientes gráficos pueden representar el área de los rectángulos en función de la base. En cada caso, explicar por qué sí y por qué no.





La búsqueda que promueven las preguntas a), b) y c) pone de manifiesto la existencia de una relación entre la base y el área de los rectángulos. Compartir las respuestas en un espacio colectivo y organizar los valores obtenidos en una tabla permitirá explicitar y

www.elsolucionario.org

precisar que, a diferencia de los procesos lineales, aquí aparece un fenómeno que no es siempre creciente ni siempre decreciente, y donde hay por lo menos dos valores para la base que se corresponden con el mismo valor del área.

El ítem d) permite analizar en los gráficos algunas características cualitativas del fenómeno cuadrático: "sube y baja", es simétrico, hay un máximo, el máximo se encuentra "en el medio", el crecimiento no es uniforme. No estamos pensando en comparar los gráficos propuestos con otro producido a partir de los valores en una tabla para identificar los que son "parecidos", sino en que la aceptación o el rechazo de un gráfico se base en las características del fenómeno que mencionamos.

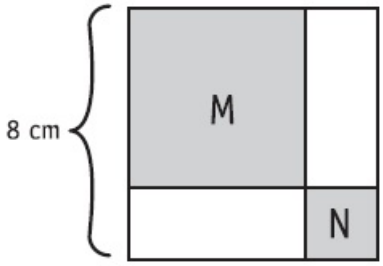
Analicemos los distintos gráficos: el gráfico 5 se puede descartar fácilmente porque no es simétrico. Para descartar el gráfico 2, que crece y decrece linealmente, será necesario recurrir a la tabla para ver que las variaciones no son uniformes; la tabla se transforma así en un soporte para reflexionar sobre la variación del área en función de la base –aun cuando no permita ver el comportamiento global de un fenómeno–. El gráfico 1 requiere de un análisis más fino de las variaciones a partir de la tabla para observar que la función debería crecer más rápidamente cerca de $b = 0$ y $b = 11$ y más lentamente "en el medio". Para los gráficos

3 y 4 se puede recurrir a un argumento geométrico como el que presentamos más arriba, apelando a que entre dos rectángulos de igual área siempre se puede encontrar otro de área mayor. Finalmente, el gráfico 6 reúne todas las características que mencionamos.

Después de haber discutido por qué se descarta o no cada uno de los gráficos, se puede proponer la búsqueda de una fórmula para la función estudiada. Habrá que volver sobre el contexto original, pues ni el gráfico ni la tabla dan información suficiente.

Proponemos ahora otra situación, que no analizaremos aquí, donde la relación cuadrática involucrada tiene un mínimo en lugar de un máximo.

En un cuadrado de lado 8cm se trazan dos segmentos paralelos a los lados. Dentro del cuadrado quedan determinados los cuadrados M y N.



a) Si el lado del cuadrado N mide 3 cm. ¿Cuál es el área sombreada?

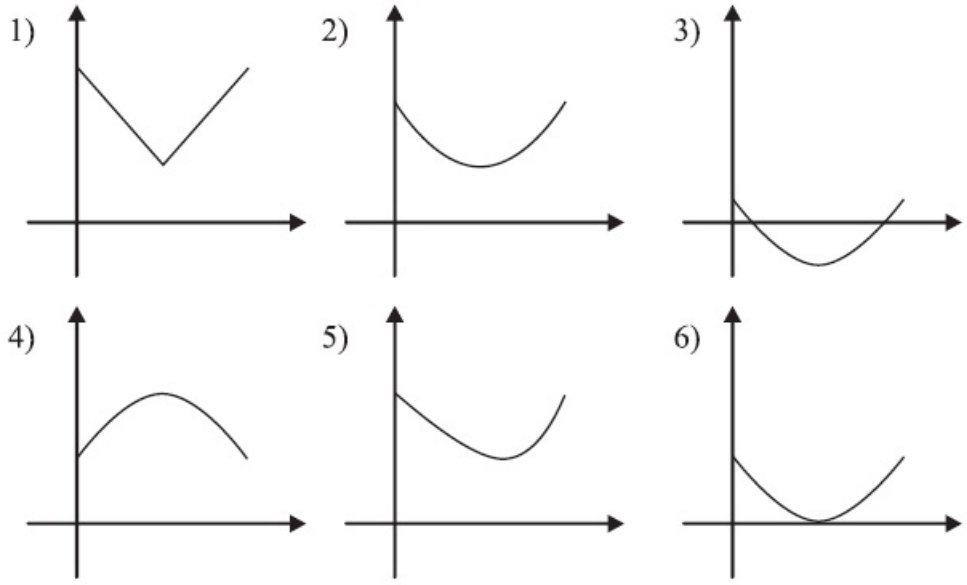
b) ¿Y si el lado del cuadrado N mide 5,7cm?

c) ¿Habrá algún valor del lado del cuadrado N tal que el área de la región sombreada sea mayor que 45 cm2? ¿Y menor?

d) ¿Habrá algún valor del lado del cuadrado N tal que el área dé igual a 43,38cm²?

e) Decidir cuáles de los siguientes gráficos pueden representar el área sombreada en función del lado del cuadrado N.

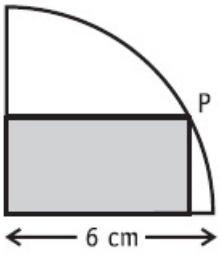
f) Escribir una fórmula que permita calcular el área de la región sombreada a medida que varía x.



El análisis de las fórmulas y los gráficos cuando el dominio son todos los reales permite extender el significado de las funciones más allá del contexto particular y realzar la diferencia entre el objeto función en sí mismo y su utilización en la situación específica. Por ejemplo, para $11 \cdot b - b2$ es posible analizar que en algún momento $b2$ será mayor que $11 \cdot b$ y entonces el resultado será negativo.

Segundo problema

Un punto P se mueve sobre un cuarto de circunferencia de radio 6cm. De todos los rectángulos que se pueden dibujar, ¿cuál es el de mayor área?



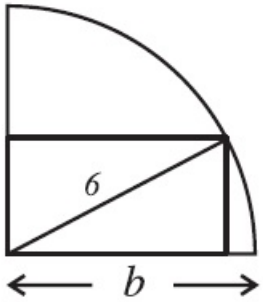
En este caso no parece tan sencillo analizar la variación del área en forma geométrica. Se parece al problema anterior en que hay simetría entre los rectángulos “parados” y los “acostados”. Como en los casos límite de bases 0 y $6cm$ las áreas se anulan, se puede

www.elsolucionario.org

conjeturar que el cuadrado va a cumplir un rol especial y es un buen candidato como rectángulo de área máxima.

Midiendo a partir de una figura a escala o usando el teorema de Pitágoras se puede armar una tabla de valores:

b	h	*Área*
1	5,92	5,92
2	5,66	11,32
2,5	5,45	13,625
3	5,20	15,60
3,5	4,87	17,045
4	4,47	17,88
4,5	3,97	17,865
5	3,32	16,6
6	0	0,0



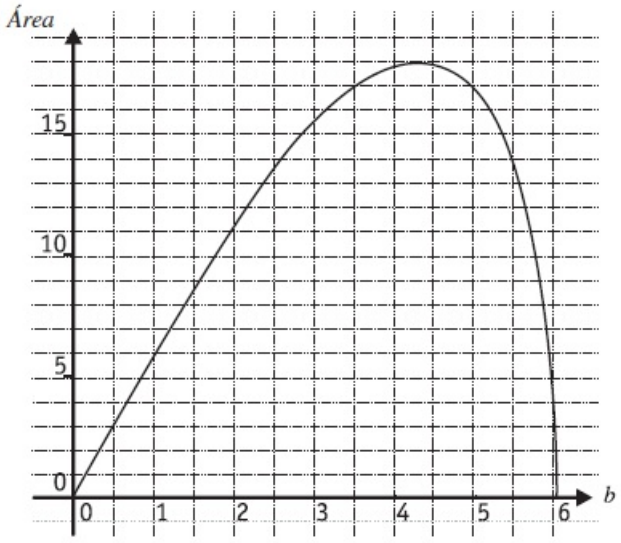
$h^2 = 6^2 - h^2$

$Área = b \cdot h$

Se puede escribir el área de los rectángulos como función de la base:

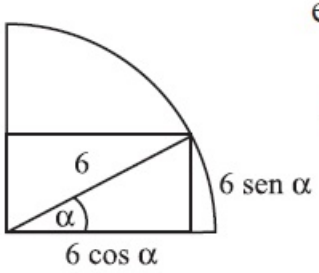
$$Área\ (b) = b \cdot \sqrt{36 - b^2}\ ,$$

y graficar esta función:



para encontrar que el área máxima será para un rectángulo de base entre *4* y *4,5*.

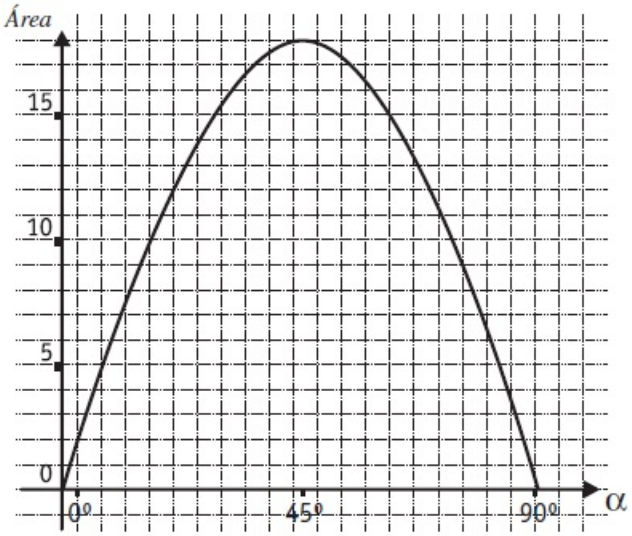
¿Por qué el máximo no está en $b = 3$? Tanto en el gráfico como en la tabla produce sorpresa que el máximo no se encuentre en el punto medio. ¿Qué está pasando que la función que modeliza la situación no refleja la simetría de la situación?



¿Simetría respecto de qué? Si pensamos el área en función del ángulo α:

$$Área(\alpha) = 6\ sen\ \alpha \cdot 6\ cos\ \alpha = 18 \cdot sen\ 2\ \alpha$$

obtenemos un gráfico que sí es simétrico (respecto de la recta α=*45*°) y permite encontrar fácilmente el máximo en *45*°[24]:

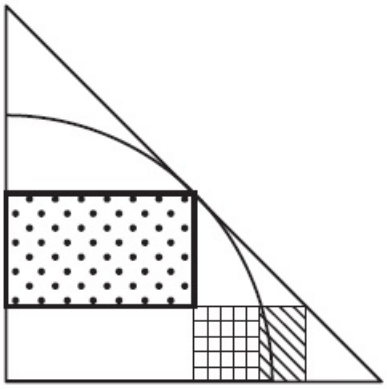


Si el ángulo que forma la diagonal de un rectángulo con uno de los lados es de *45*°, se trata de un cuadrado.

Las fórmulas para calcular el área en función de la base *b* y en función del ángulo α representan dos modelos distintos de una misma situación, que muestran aspectos distintos y no involucran las mismas herramientas y conocimientos. El primer modelo expresa explícitamente el área en función de la base, no es simétrico (la variación del área no es la misma para valores de *b* cercanos a cero que para valores cercanos a *6*) y usa el teorema de Pitágoras. El modelo que expresa el área de los rectángulos en función del ángulo α necesita de las funciones trigonométricas seno y coseno.

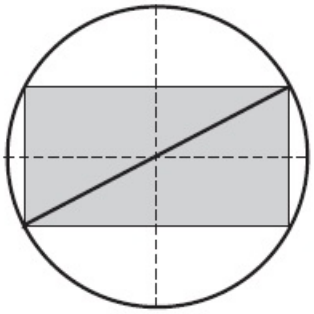
Aunque en principio un modelo geométrico pueda no parecer interesante, si se construye un triángulo rectángulo isósceles de modo que la hipotenusa sea tangente a la circunferencia en el vértice del cuadrado, podemos apoyarnos en el primer problema para demostrar que efectivamente el cuadrado es el rectángulo de área máxima:

www.elsolucionario.org



El rectángulo punteado tiene mayor área
que el cuadriculado y el rayado juntos.

Jugando con la geometría, también podemos imaginar una circunferencia completa y maximizar el área de los rectángulos inscriptos en ella, en lugar de trabajar con el cuarto de circunferencia. El problema se transforma así en el de encontrar un triángulo de área máxima entre todos los triángulos rectángulos que están inscriptos en una misma semicircunferencia y cuya hipotenusa es igual al diámetro.



De todos los triángulos rectángulos de igual
hipotenusa, tendrá mayor área el que tenga
mayor altura correspondiente a la hipotenusa.

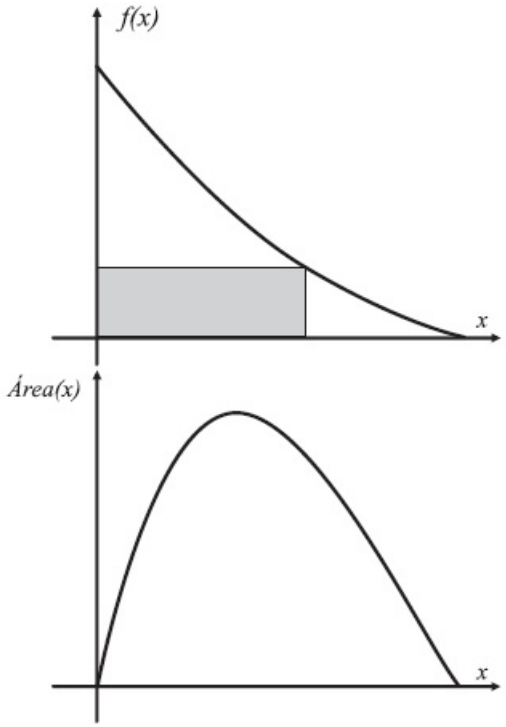
Una familia de problemas

Podemos pensar los problemas que vimos hasta ahora como incluidos en la siguiente "familia" de problemas:

Dada la función f(x), decidir cuál de los rectángulos de vértices (0,0), (x,0), (x,f(x)), (0,f(x)) tiene mayor área.

En el primer problema la función fue $f(x) = 11 - x$, y en su variante, $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$. En el segundo problema, $f(x) = x \cdot \sqrt{(36 - x^2)}$. ¿Qué pasa con otras funciones? ¿Siempre habrá un valor máximo? Las gráficas de las correspondientes áreas $A(x) = x \cdot f(x)$ nos permitirán hacer un análisis de diferentes comportamientos.

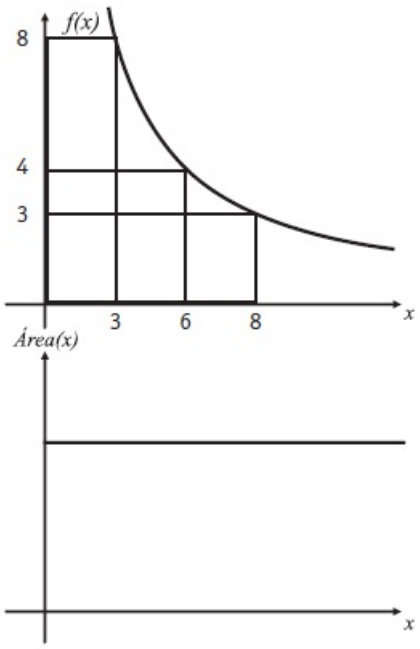
Si f es una función continua no negativa que corta a los dos ejes en los puntos $(0,b)$ y $(c,0)$, siempre va a haber un rectángulo de área máxima porque $A(0) = A(c) = 0$ y $A(x)$ es una función continua no nula y no negativa.



¿Qué pasa si f no corta a los ejes? El panorama es bastante más variado.

Un caso bien particular es el de las hipérbolas, porque para cualquier hipérbola de la forma $y = k/x$ todos los rectángulos tienen la misma área.

www.elsolucionario.org

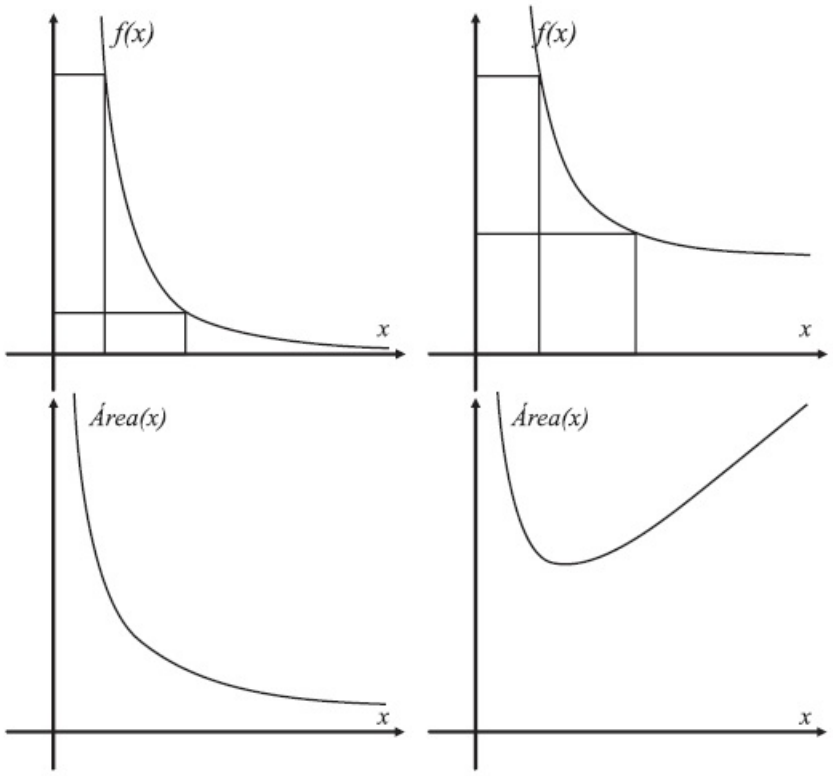


Para $f(x) = 24/x^2$

no hay ningún rectángulo de área máxima, ni de área mínima. El área de los rectángulos tiende a infinito, cuando la base (tomada sobre el eje x) tiende a cero, y el área tiende a cero cuando la base tiende a infinito. De modo que se pueden encontrar rectángulos de áreas tan grandes o tan chicas como se quiera. Por ejemplo, la búsqueda de áreas mayores que un millón o menores que un millonésimo puede aportar a la construcción del concepto de límite.

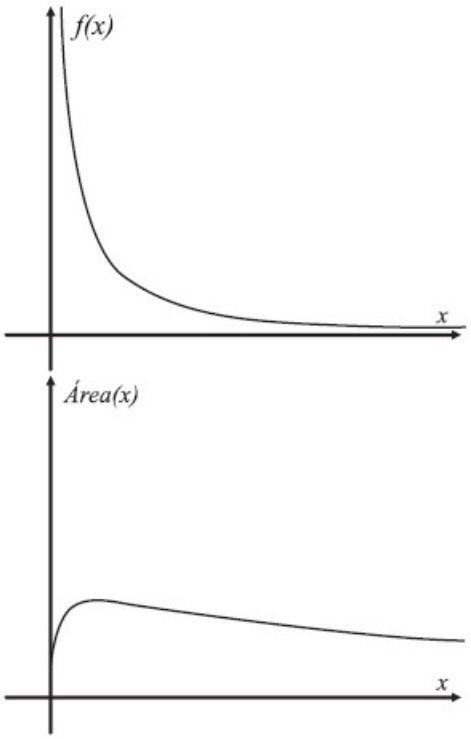
En cambio, para $f(x) = 24/x^2 + 4$

no hay ningún rectángulo de área máxima, pero sí de área mínima.



En estos últimos ejemplos donde los gráficos de las funciones no cortan a los ejes, en ningún caso encontramos rectángulos de área máxima. Vimos anteriormente que "cortar a los ejes" es una condición suficiente para en contrar un máximo. Uno podría preguntarse si es además una condición necesaria. La respuesta es no. Por ejemplo, *f(x)=24/(x .(x+1))*.

www.elsolucionario.org



Gráfica f(x) $= 24 / (\sqrt{x} \cdot (x+1))$., *A (x)* $= 24\sqrt{x} \cdot / (x+1)$

A modo de síntesis

Como ya mencionamos, distintos formatos de enunciado y modificaciones en los datos pueden influir sobre los procedimientos de resolución y las formas de representación.

Así es como "*buscar un rectángulo de área máxima entre todos los rectángulos de igual perímetro*" favorece una escritura de la forma *2b + 2h = Perímetro* y una resolución más bien numérica, mientras que "*buscar un rectángulo de área máxima entre todos los rectángulos inscriptos en un triángulo rectángulo*" promueve una búsqueda geométrica. Por otro lado, para "*buscar un rectángulo de área máxima entre todos los rectángulos bajo la recta y = k – x*" no es necesario reconocer que todos los rectángulos tienen igual perímetro. Desde ya que los procedimientos no están unívocamente determinados por el enunciado, sólo hablamos de favorecer, promover, influir.

Al modificar la función *f(x)* en el enunciado "*buscar un rectángulo de área máxima entre todos los rectángulos del primer cuadrante bajo la curva y = f(x)*" se modifican las características de la solución.

Si *f(x)* es una recta cualquiera de pendiente *-1*, el área máxima es la del cuadrado y sus vértices son los puntos medios del triángulo rectángulo equilátero que forman los ejes cartesianos y la recta. Cuando la pendiente no es *-1*, el área máxima ya no es alcanzada por un cuadrado, pero los vértices del rectángulo de área máxima siguen siendo puntos

medios. Explorar estas cuestiones puede dar lugar a un trabajo interesante.

Al mismo tiempo, tanto para la recta de pendiente *-1* como para la circunferencia, la gráfica de *f(x)* es simétrica respecto de la recta $y = x$, y en consecuencia el área máxima tiene que ser alcanzada por un cuadrado. Es interesante notar que para la circunferencia la variable relevante para la simetría no es x sino el ángulo que forma la diagonal de los rectángulos con el eje x.

Si la función *f(x)* no corta a los ejes, la existencia de un rectángulo de área máxima o mínima dependerá de la velocidad de decrecimiento de la función *f(x)* (el problema sólo tiene sentido si la función *f(x)* es decreciente).

21 Para el análisis de este problema hemos tomado algunas ideas de Panizza y Sadovsky (1994).

22 Estos *softwares* emulan básicamente el trabajo con regla y compás, permitiendo hacer construcciones geométricas a partir de relaciones y propiedades geométricas. Los elementos de las figuras son fijos o movibles, permaneciendo invariantes sólo las relaciones que se incluyeron explícitamente. Se puede encontrar un software de geometría dinámica de uso libre en <http://www.geogebra.org>.

23 Se puede encontrar un análisis didáctico de este problema en Douady (1996: 245-255).

24 Para encontrar el máximo, también se puede derivar la función $Área(\alpha) = 36\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$. Usar la identidad trigonométrica $sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$ permite encontrar el máximo a partir de la gráfica sin necesidad de *derivar*.

www.elsolucionario.org

PARA SEGUIR PENSANDO

Queremos compartir aquí algunas preguntas y reflexiones que surgieron mientras elaborábamos este libro: ¿Cómo influye la concepción de la matemática que tiene el docente sobre su proyecto de enseñanza? ¿En qué proyecto se inserta el trabajo de modelización que proponemos? ¿Es posible un proyecto de esta naturaleza? ¿Qué lugar le asignamos a la informática? ¿Qué implicancias tiene considerar separadamente qué enseñar y cómo enseñarlo?

Pensamos que los alumnos aprenden matemática *haciendo* matemática. Poner el foco en el *hacer* nos lleva a formularnos preguntas como las siguientes: ¿Qué diferencia hay entre trabajar con lápiz y papel, calculadora, regla y compás, o con herramientas informáticas? ¿Se aprende lo mismo usando representaciones gráficas, técnicas algebraicas o modelos geométricos? ¿Qué se aprende al hallar la solución de una ecuación con el *zoom* de un graficador de funciones o al calcularla a partir de aproximaciones numéricas? ¿Qué significa *saber* el teorema de Thales: demostrarlo, aplicarlo, reconocer situaciones donde es válido y donde no? Más aún, ¿el teorema de Thales es un resultado algebraico, geométrico, funcional? Desde nuestro punto de vista, las herramientas, las estrategias, los modos de representar, son constitutivos de los conceptos, "las ideas matemáticas no existen independientemente de las prácticas asociadas a ellas. Un concepto no puede ser caracterizado a través de su definición"[25].

Indudablemente, las herramientas informáticas amplían las posibilidades de trabajo. ¿En qué momentos incluirlas?

¿Cómo generar problemas para el aula de modo que las nuevas tecnologías no remplacen la actividad matemática de los alumnos, sino que estén a su servicio? Se abre así una gama de nuevas cuestiones. ¿Dice más un gráfico hecho a mano que uno producido mediante una calculadora gráfica? ¿Cómo capitalizar la velocidad de cálculo?

La inmensa cantidad de ejemplos que brinda una computadora puede aprovecharse como fuente de conjeturas, y si bien muchos ejemplos pueden generar certeza, no explican las razones detrás de un determinado fenómeno. ¿Cómo repercute este plus de la tecnología en la necesidad de validación y fundamentación?

¿Cuál es en realidad la función de una demostración matemática: comprender, convencer, explicar? ¿Cómo enfrentar estos nuevos problemas didácticos?

Además, los problemas que la matemática puede resolver de manera exacta son pocos. En general, hay que contentarse con una cierta aproximación. ¿Por qué la escuela actual fomenta la idea de que para obtener el resultado de cualquier problema hay que aplicar fórmulas bien determinadas? ¿Por qué sólo se resuelven ecuaciones para las cuales se conocen fórmulas?

¿Por qué no se resuelven ecuaciones de segundo grado con métodos aproximados? ¿Por qué se omiten ecuaciones como $2^x = x + 3$?

En distintos momentos del libro, estudiamos familias de problemas que resultaron de considerar, como parámetros, algunos datos y/o variables de una situación, permitiéndonos tomar distancia del problema particular. Esta perspectiva más general puede proveer un criterio para elegir valores de los datos en concordancia con las cuestiones que el docente quiere promover. En otras ocasiones apelamos, como herramienta didáctica, al intercambio de roles entre datos e incógnitas. Cambiar la pregunta que se hace sobre una misma situación puede transformar un problema en otro bien diferente.

El recorte de una problemática a partir de una realidad compleja también forma parte del proceso de modelización. ¿Cómo se hace el recorte de lo que es relevante de un fenómeno? ¿Viene dado en el libro donde se encontró el problema? ¿Lo hace el docente? ¿Es parte de la tarea de los alumnos? ¿Quién decide cuáles variables son relevantes? ¿Con qué objetivo?

¿Es posible llevar al aula los problemas que presentamos? ¿Están nuestros alumnos en condiciones de abordarlos? El trabajo que proponemos supone un recorrido no lineal, que requiere de constantes “idas y venidas”, de la aceptación de conocimientos provisorios, y forma parte de un proyecto de enseñanza que ofrece a los alumnos la experiencia de producir y reinventar conocimiento matemático. Desde una concepción de la matemática que la cuestiona como saber acabado e inamovible, esperamos contribuir al debate sobre el sentido de la enseñanza de la matemática en la escuela media.

25 Sadovsky (2005).

www.elsolucionario.org

BIBLIOGRAFÍA

BERGÉ, A. y SESSA, C. (2004) *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes para una investigación didáctica,* RELIME, vol.6 nº3.

BERTÉ, A. (2005) *Matemática dinámica*, Buenos Aires, a-Z editora. COURANT, R. y ROBBINS, H. (1941) *¿Qué son las matemáticas?*

Conceptos y métodos fundamentales, México, Fondo de cultura económica. (primera edición en español 2002, primera reimpresión 2006).

CHARNAY, R. (1994) "Aprender por medio de la resolución de problemas", en Parra C. y Saiz I. (comps.) *Didáctica de la Matemática*, Buenos Aires, Paidós.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997) *Estudiar Matemáticas – El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, Editorial HORSORI.

DOUADY, R. (1984) "Jeux de cadre et dialectique outil-objet", en *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 7.2, pp 5-31, La pensée sauvage, Grenoble.

DOUADY, R. (1996) "Ingeniería Didáctica. Construcción de problemas en los que el álgebra y la geometría se alimentan mutuamente", en *Enseñanza de las Matemáticas: relación entre saberes, programas y prácticas*,

París, Irem de Paris VII, Topiques Editions.

EUCLIDES (1991) *Elementos,* Madrid, Editorial Gredos.

PERRIN GLORIAN, M. J. (1998) *"Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu: structuration du milieu pour l'élève et pour le maître"*, en Noirfalise (ed), Actes de l'Université d'été.

La Rochelle-Charente-Maritime. Irem de Clermont-Ferrand.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES (2007) "Matemática. Geometría. Nivel Medio. Aportes para la enseñanza", en <www.buenosaires.gov.ar/

areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media. pdf>

PANIZZA, M. y SADOVSKY, P. (1994*) Documento de orientación de la enseñanza de la matemática en la escuela media*, Buenos Aires, Escuela de Capacitación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

PANIZZA, M.; SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1996) "Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito", en <http://www. fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/pss_1996.doc>.

PAPINI, C. (2002) "Algunos aportes de la psicología de Vigotsky a la problemática didáctica de los primeros aprendizajes del álgebra elemental", tesis de Magister en Educación,

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

PERELMAN, Y. I. (1935) *Matemáticas recreativas*, Moscú, Editorial Mir.

REY PASTOR, J. (1963) *Análisis Matemático*, Buenos Aires, Kapelusz. SADOSKY, M. (1952) *Cálculo numérico y gráfico*, Buenos Aires,Sudamericana.

SADOVSKY, P. (2005) *Enseñar matemática hoy*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

SADOVSKY, P.; PARRA, C.; ITZCOVICH, H. y BROITMAN, C. (1998) "La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Documento de actualización curricular N° 5", Dirección de Currícula,

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, en <http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matedoc5.pdf>

SANTALÓ, L. A. (1966) *La matemática en la escuela secundaria*, Buenos Aires, EUDEBA SECRETARíA DE EDUCACIÓN DEL GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES (2004)

Programa de Matemática para segundo año de la escuelas medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

SESSA, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

TíJONOV, A. y KOSTÓMAROV, D. (1984) *Conferencias de introducción a las matemáticas aplicadas*, Moscú, Mir.

Agradecemos a Patry por su confianza y sus aportes, a Carmen, Mabel, nuestros alumnos de cursos y talleres, Valeria y Mara.

ES